

N° 12-001-X au catalogue  
ISSN 1712-5685

## Techniques d'enquête

# Modèles spatiaux bayésiens pour l'estimation des moyennes pour petites régions échantillonnées et non échantillonnées

par Hee Cheol Chung et Gauri S. Datta

Date de diffusion : le 15 décembre 2022



Statistique  
Canada

Statistics  
Canada

Canada

---

## Comment obtenir d'autres renseignements

Pour toute demande de renseignements au sujet de ce produit ou sur l'ensemble des données et des services de Statistique Canada, visiter notre site Web à [www.statcan.gc.ca](http://www.statcan.gc.ca).

Vous pouvez également communiquer avec nous par :

**Courriel** à [infostats@statcan.gc.ca](mailto:infostats@statcan.gc.ca)

**Téléphone** entre 8 h 30 et 16 h 30 du lundi au vendredi aux numéros suivants :

- |   |                |
|---|----------------|
| • Service de renseignements statistiques                                    | 1-800-263-1136 |
| • Service national d'appareils de télécommunications pour les malentendants | 1-800-363-7629 |
| • Télécopieur   | 1-514-283-9350 |

## Normes de service à la clientèle

Statistique Canada s'engage à fournir à ses clients des services rapides, fiables et courtois. À cet égard, notre organisme s'est doté de normes de service à la clientèle que les employés observent. Pour obtenir une copie de ces normes de service, veuillez communiquer avec Statistique Canada au numéro sans frais 1-800-263-1136. Les normes de service sont aussi publiées sur le site [www.statcan.gc.ca](http://www.statcan.gc.ca) sous « Contactez-nous » > « [Normes de service à la clientèle](#) ».

## Note de reconnaissance

Le succès du système statistique du Canada repose sur un partenariat bien établi entre Statistique Canada et la population du Canada, les entreprises, les administrations et les autres organismes. Sans cette collaboration et cette bonne volonté, il serait impossible de produire des statistiques exactes et actuelles.

Publication autorisée par le ministre responsable de Statistique Canada

© Sa Majesté le Roi du chef du Canada, représenté par le ministre de l'Industrie 2022

Tous droits réservés. L'utilisation de la présente publication est assujettie aux modalités de l'[entente de licence ouverte](#) de Statistique Canada.

Une [version HTML](#) est aussi disponible.

*This publication is also available in English.*

---

# Modèles spatiaux bayésiens pour l'estimation des moyennes pour petites régions échantillonnées et non échantillonnées

Hee Cheol Chung et Gauri S. Datta<sup>1</sup>

## Résumé

Dans de nombreuses applications, les moyennes de population des petites régions géographiquement adjacentes présentent une variation spatiale. Si les variables auxiliaires disponibles ne tiennent pas suffisamment compte de la configuration spatiale, la variation résiduelle sera incluse dans les effets aléatoires. Par conséquent, l'hypothèse de distribution indépendante et identique sur les effets aléatoires du modèle Fay-Herriot échouera. De plus, des ressources limitées empêchent souvent l'inclusion de nombreuses sous-populations dans l'échantillon; il en résulte de petites régions non échantillonnées. Le problème peut être exacerbé au moment de prédire les moyennes de petites régions non échantillonnées à l'aide du modèle de Fay-Herriot ci-dessus, car les prévisions seront faites uniquement en fonction des variables auxiliaires. Pour remédier à ce problème, nous considérons les modèles spatiaux bayésiens à effets aléatoires qui peuvent prendre en compte de multiples régions non échantillonnées. Dans des conditions légères, nous déterminons si les distributions *a posteriori* de divers modèles spatiaux sont adaptées à une catégorie utile de densités *a priori* incompatibles avec les paramètres du modèle. L'efficacité de ces modèles spatiaux est évaluée à partir de données simulées et réelles. Plus précisément, nous examinons les prévisions du revenu médian des familles de quatre personnes à l'échelle de l'État fondées sur la « Current Population Survey » (enquête sur l'état de la population) de 1990 et le « Census for the United States of America » (recensement mené aux États-Unis d'Amérique) de 1980.

**Mots-clés :** Autorégression conditionnelle; Current Population Survey; modèle Fay-Herriot; autorégression intrinsèque; effets mixtes; autorégression simultanée; petites régions non échantillonnées.

## 1. Introduction

Les enquêtes par sondage fournissent des données utiles pour estimer les diverses caractéristiques d'une population d'intérêt. Les enquêtes sont généralement conçues de sorte que les estimateurs fondés sur le plan de sondage présentent une exactitude adéquate. Toutefois, lorsqu'il s'agit d'estimer une caractéristique d'une sous-population, une estimation directe fondée sur le plan de sondage et uniquement sur les données de cette sous-population est habituellement inexacte, car l'échantillon accessible est petit, voire inexistant. On appelle « petites régions » les sous-populations dont la taille d'échantillon n'est pas suffisante pour produire des estimations directes fiables. De plus, des ressources limitées empêchent souvent la sélection de nombreuses sous-populations dans l'échantillon, ce qui crée de petites régions non échantillonnées. Par exemple, l'American Community Survey (ACS) vise à produire des statistiques fiables pour les comtés des États-Unis. Cependant, l'ACS échantillonne habituellement environ le tiers des comtés, ce qui donne de nombreuses petites régions non échantillonnées.

Afin d'accroître l'exactitude des estimations directes pour petites régions, une approche fondée sur un modèle a été largement utilisée pour faciliter l'emprunt d'information à partir des estimations directes d'autres domaines et d'autres données auxiliaires. Dans de nombreuses applications, des renseignements supplémentaires provenant d'autres enquêtes et de données administratives fournissent des covariables

---

1. Hee Cheol Chung, Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Charlotte, Charlotte, Caroline du Nord. Courriel : chung13@unc.edu; Gauri S. Datta, Department of Statistics, University of Georgia, Athens, GA et Center for Statistical Research and Methodology, U.S. Census Bureau, Suitland, MD.

utiles. Une estimation d'une région, fondée sur un modèle, est produite en réduisant de façon appropriée son estimation directe (si elle est disponible) à une estimation par régression synthétique fondée sur des variables auxiliaires. L'amélioration de la prévision dépend grandement de la mesure dans laquelle les moyennes de sous-population pour la caractéristique sont liées aux variables auxiliaires. Si une petite région n'a pas d'estimation directe, le modèle traditionnel indépendant à effets aléatoires de Fay et Herriot (1979) permet d'estimer la moyenne par une estimation par régression synthétique seulement.

Fay et Herriot (1979) ont proposé un modèle utile permettant d'élaborer des estimations de moyennes pour petites régions, fondé sur des estimations directes d'enquête (si disponibles) et des estimations par régression synthétique calculées à partir de variables auxiliaires. Ce modèle, qui est essentiellement un modèle linéaire mixte, est communément appelé le modèle Fay-Herriot (FH) dans l'estimation pour petites régions. Pour  $i = 1, \dots, m$ , supposons que  $Y_i$  est l'estimation directe de la caractéristique sur petites régions  $\theta_i$  obtenue à partir d'une enquête. Supposons aussi que  $\mathbf{x}_i$  et  $\boldsymbol{\beta}$  sont les vecteurs à  $p$  composantes des covariables et les coefficients de régression correspondants, respectivement. En indiquant l'erreur d'échantillonnage de  $Y_i$  comme étant  $e_i$ , le modèle FH à effets aléatoires indépendants peut être formulé comme suit :

$$Y_i = \theta_i + e_i, \quad \theta_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + v_i, \quad i=1, \dots, m, \quad (1.1)$$

où les  $e_i$  et les effets aléatoires  $v_i$   $i=1, \dots, m$ , sont tous répartis indépendamment avec  $e_i \sim N(0, D_i)$ , et  $v_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_v^2)$ . Les variances d'échantillonnage  $D_i$ ,  $i=1, \dots, m$  sont considérées comme connues, tandis que le paramètre de régression  $\boldsymbol{\beta}$  et la variance d'erreur du modèle  $\sigma_v^2$ , appelés paramètres de modèle, sont des quantités inconnues. Pour les régions non échantillonnées comportant des variables auxiliaires, seule la deuxième partie de (1.1) est vérifiée pour  $\theta_i$ .

De nombreuses études ont été menées sur le modèle FH à effets aléatoires indépendants et ses nombreuses variantes. Alors que Fay et Herriot (1979) ont utilisé l'approche empirique de Bayes (EB), par la suite, Prasad et Rao (1990), Datta et Lahiri (2000) et Datta, Rao et Smith (2005) ont utilisé l'approche fréquentiste et ont dérivé l'erreur quadratique moyenne (EQM) de deuxième ordre du meilleur prédicteur linéaire sans biais empirique (MPLSBE) de  $\theta_i$  et divers estimateurs approximatifs sans biais de deuxième ordre de l'EQM (voir Datta et Lahiri, 2000). Cependant, Ghosh (1992) a proposé une approche hiérarchique bayésienne (HB) pour le modèle Fay-Herriot (voir aussi Datta et coll. [2005]). Dans le cadre bayésien, le modèle FH dans (1.1) peut être exprimé comme le modèle HB suivant :

$$Y_i | \theta_i, \dots, \theta_m, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2 \stackrel{\text{ind}}{\sim} N(\theta_i, D_i), \quad i=1, \dots, m, \quad (1.2)$$

$$\theta_i | \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2 \stackrel{\text{ind}}{\sim} N(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2), \quad i=1, \dots, m, \quad (1.3)$$

$$\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2) \propto g(\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2), \quad (1.4)$$

où  $g(\cdot)$  est une fonction correctement choisie de  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\sigma_v^2$ , qui exprime une fonction de densité de probabilité (fdp) *a priori* pour ces paramètres. Fay et Herriot (1979) ont élaboré à l'origine un prédicteur

EB pour  $\theta_i$ , qui ne nécessite pas de fdp *a priori*, comme dans (1.4). Bien qu'une approche EB standard sous-estime habituellement la mesure de l'incertitude de l'estimateur EB de  $\theta_i$ , l'approche HB facilite la quantification de l'incertitude en raison de l'estimation des paramètres de modèle inconnus,  $\beta$  et  $\sigma_v^2$ . L'incertitude est entièrement représentée par la distribution *a posteriori* des paramètres du modèle.

Dans les estimations fondées sur un modèle, les effets aléatoires sont d'une grande importance pour bien rendre compte de la variabilité restante des  $\theta_i$  qui n'est pas expliquée par le modèle de régression. Dans des applications réelles, les petites régions comportent généralement des caractéristiques comme la taille de la population, l'origine ethnique, le groupe d'âge et le niveau de scolarité, lesquelles peuvent avoir une incidence sur la variabilité des effets sur les petites régions. De plus, lorsque les taux de prévalence de la maladie sont intéressants, il est raisonnable de supposer que les effets aléatoires de petites régions adjacentes sont corrélés d'une certaine façon. Dans de tels cas, le modèle FH présenté en (1.1), que nous appelons le modèle FH à effets aléatoires indépendants, est une simplification excessive et une erreur de spécification de la distribution des effets aléatoires en supposant une distribution commune et indépendante. Opsomer, Claeskens, Ranalli, Kauermann et Breidt (2008) et Rao, Sinha et Dumitrescu (2014) ont proposé des modèles non paramétriques d'estimation pour petites régions, qui permettent de cerner l'effet de proximité spatiale à l'aide de la fonction p-spline (spline pénalisée). Toutefois, ces approches exigent des coûts informatiques supplémentaires pour l'inférence du modèle et la quantification de l'incertitude.

Dans le cadre de la présente étude, nous proposons des modèles FH spatiaux qui tiennent effectivement compte de l'hétéroscédasticité et de la dépendance spatiale des effets sur de petites régions. Nous adoptons une approche entièrement bayésienne en spécifiant une classe de distributions *a priori* non informatives sur les paramètres du modèle et incompatibles avec ceux-ci, et nous modélisons la dépendance spatiale des effets aléatoires sur petites régions par quatre structures d'autocorrélation largement utilisées. Il s'agit notamment de modèles autorégressifs simultanés et de trois types de modèles autorégressifs conditionnels. Il existe une abondante littérature sur les modèles spatiaux dans le cadre bayésien. Sun, Tsutakawa et Speckman (1999) ont étudié un modèle HB avec les modèles autorégressifs conditionnels et intrinsèques sur les effets aléatoires. Speckman et Sun (2003) ont examiné les mêmes modèles dans le contexte du lissage bayésien de la spline. Pour l'estimation sur petites régions, You et Zhou (2011) ont modélisé les effets sur petites régions à l'aide d'un modèle autorégressif conditionnel. Dans le prolongement du modèle de séries chronologiques FH (Datta, Lahiri, Maiti et Lu, 1999), Torabi (2012) a proposé un modèle spatio-temporel ayant des effets aléatoires autorégressifs intrinsèques. Porter, Holan, Wikle et Cressie (2014) ont proposé une extension du modèle FH ayant des covariables fonctionnelles et des effets aléatoires autorégressifs intrinsèques. Porter, Wikle et Holan (2015) ont intégré les effets aléatoires conditionnels autorégressifs au modèle FH multivarié.

Les modèles bayésiens actuels d'estimation spatiale sur petites régions considèrent une distribution *a priori* adéquate sur  $\sigma_v^2$ , même si la spécification d'une telle distribution *a priori* nécessitera des connaissances spécialisées. De plus, tous les modèles actuels supposent une structure autorégressive conditionnelle sur les effets aléatoires. Les principales contributions du présent article sont les suivantes. Premièrement, à notre connaissance, les modèles proposés à la section 2 (section 2.1) comprennent la plupart des structures spatiales couramment utilisées. Deuxièmement, à la section 2.2, nous élargissons

davantage les modèles spatiaux pour estimer les moyennes de plusieurs petites régions non échantillonnées sans estimations directes. La moyenne  $\theta_i$  de la zone non échantillonnée est estimée par l'emprunt d'information des variables auxiliaires de la région et, pour les modèles spatiaux, des résidus de régression des régions avoisinantes. Troisièmement, pour tous les modèles proposés, nous fournissons, à la section 2.3, des conditions suffisantes pour la propriété *a posteriori* pour une classe de distributions *a priori* non informatives sur les paramètres du modèle et incompatibles avec ceux-ci. Il est intéressant de mentionner que les conditions suffisantes ne dépendent pas du modèle spatial présumé, à condition que le modèle produise une matrice de covariance définie positive pour les effets aléatoires. Nous fournissons des étapes d'échantillonnage de rejet pour la simulation à partir de la distribution *a posteriori* des modèles proposés à la section 3. L'efficacité des modèles spatiaux proposés est démontrée aux sections 4 et 5. Nous appliquons les modèles spatiaux à des ensembles de données simulées et à des données d'enquête réelles issues de la Current Population Survey (CPS). Nous comparons divers modèles spatiaux à la section 5 pour estimer le revenu médian des familles de quatre personnes pour les 49 États contigus des États-Unis, d'après les données de la CPS, les covariables appropriées du recensement précédent et des données administratives. Nos analyses de données et nos études de simulation révèlent que les modèles spatiaux proposés améliorent considérablement l'exactitude des prévisions et réduisent la mesure de l'incertitude, l'écart-type *a posteriori*. Nous formulons des observations finales à la section 6. Toutes les précisions techniques sont fournies à l'annexe.

## 2. Certaines options spatiales en remplacement du modèle Fay-Herriot à effets aléatoires indépendants

### 2.1 Intégration des effets spatiaux aléatoires

Soit  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^\top$  le vecteur à  $m$  composantes avec les estimations directes de  $m$  petites régions, et soit  $\mathbf{D} = \text{diag}\{D_i\}_{i=1}^m$  la matrice diagonale  $m \times m$  avec les variances d'échantillonnage des estimations directes. Nous désignons par  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)^\top$  le vecteur à  $m$  composantes des moyennes de petites régions. De plus, supposons que  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur à  $p$  composantes des variables auxiliaires (y compris le terme d'ordonnée à l'origine) pour la  $i^{\text{e}}$  petite région, et que  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m]^\top$ . Un cas particulier du modèle HB donné en (1.2) à (1.4) peut s'exprimer comme suit :

$$\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2 \sim N_m(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{D}), \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2 \sim N_m(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2 \mathbf{I}_m), \quad (2.2)$$

$$\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2) \propto 1, \quad (2.3)$$

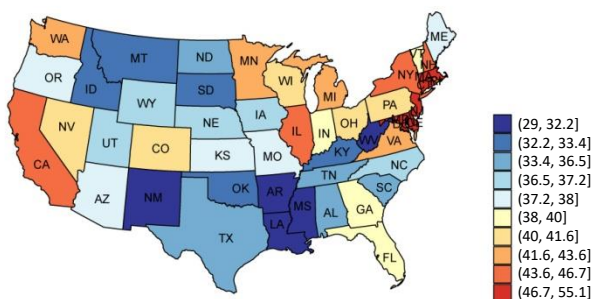
où  $\boldsymbol{\beta}$  est le vecteur du coefficient de régression à  $p$  composantes,  $\sigma_v^2$  est la variance de l'erreur du modèle et  $\mathbf{I}_m$  est la matrice d'identité d'ordre  $m$ . La distribution *a priori* uniforme (2.3) sur les paramètres du modèle est un précédent non informatif largement utilisé, et la fdp *a posteriori* qui en

résulte est adéquate, à condition que  $m > p + 2$ . Voir Berger (1985) et Datta et Smith (2003) pour obtenir une analyse détaillée.

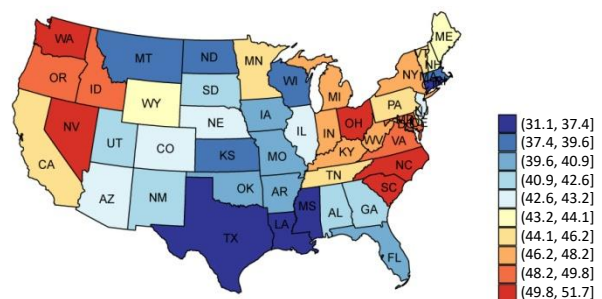
Le modèle (2.2) suppose que  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , sont répartis indépendamment sur les petites régions avec une variance des effets aléatoires communs de  $\sigma_v^2$ . Toutefois, dans de nombreux problèmes d'estimation sur petites régions, la caractéristique de la région d'intérêt est étroitement liée à des facteurs géographiques comme la taille de la population, l'ethnicité, le groupe d'âge et le niveau de scolarité. Lorsque les covariables disponibles n'expliquent pas entièrement cette association spatiale, les hypothèses d'indépendance et de variance égale des effets aléatoires échouent, et l'inférence fondée sur le modèle hiérarchique indiqué en (2.1) à (2.3) peut générer des estimations non fiables, ce qui entraîne des décisions erronées. La figure 2.1 illustre les associations spatiales du revenu médian des familles de quatre personnes de 1990 (à l'échelle de 1 000 \$) pour  $m = 49$  États des États-Unis, y compris le District de Columbia. Les données simulées ayant la même valeur I de Moran sont également affichées à des fins de comparaison, où la valeur I de Moran est une mesure d'autocorrélation spatiale. Les données simulées sont générées selon le modèle autorégressif simultané (SAR pour *simultaneous autoregressive* en anglais) (défini ci-dessous),  $\rho = 0,8$  correspondant à l'emplacement et à l'échelle des données du recensement. Les deux volets montrent l'existence d'une dépendance spatiale dans le revenu médian des familles de quatre personnes du recensement de 1990. En pratique, les covariables capables de rendre compte pleinement de la variation spatiale existante ne sont pas toujours disponibles, et le problème peut être exacerbé s'il existe des variables cachées, car elles introduisent une variabilité supplémentaire qui ne peut être expliquée par les effets aléatoires indépendants et identiquement distribués (i.i.d.).

**Figure 2.1 Illustrations graphiques du revenu médian des familles de quatre personnes issues du recensement de 1990 pour  $m = 49$  États des États-Unis et de données simulées.**

Revenu médian des familles de quatre personnes,  
recensement de 1990, I de Moran : 0,44



Simulation selon le modèle SAR, où rho = 0,8, I de Moran : 0,44



– Les données simulées sont générées selon le modèle autorégressif simultané (SAR pour *simultaneous autoregressive* en anglais), où  $\rho = 0,8$  et l'estimation du I de Moran est la même.

– AL = Alabama, AZ = Arizona, AR = Arkansas, CA = Californie, CO = Colorado, CT = Connecticut, DE = Delaware, DC = District de Columbia, FL = Floride, GA = Géorgie, ID = Idaho, IL = Illinois, IN = Indiana, IA = Iowa, KS = Kansas, KY = Kentucky, LA = Louisiane, ME = Maine, MD = Maryland, MA = Massachusetts, MI = Michigan, MN = Minnesota, MS = Mississippi, MO = Missouri, MT = Montana, NE = Nebraska, NV = Nevada, NH = New Hampshire, NJ = New Jersey, NM = Nouveau-Mexique, NY = New York, NC = Caroline du Nord, ND = Dakota du Nord, OH = Ohio, OK = Oklahoma, OR = Oregon, PA = Pennsylvanie, RI = Rhode Island, SC = Caroline du Sud, SD = Dakota du Sud, TN = Tennessee, TX = Texas, UT = Utah, VT = Vermont, VA = Virginie, WA = Washington, WV = Virginie-Occidentale, WI = Wisconsin, WY = Wyoming.

Pour régler ce problème, nous proposons d'utiliser des effets aléatoires spatialement corrélés. Supposons que  $\mathbf{W} = \{w_{ij}\}_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ , soit la matrice de contiguïté qui joue un rôle important dans la prise en compte de la dépendance spatiale. En particulier,  $w_{ij} = 1$  si les petites régions  $i^e$  et  $j^e$  sont connectées par des limites géographiques ou par d'autres mécanismes (par exemple le trafic aérien), et sinon  $w_{ij} = 0$ . Également,  $w_{ii} = 0$  pour  $i = 1, \dots, m$ . Les entrées extradiagonales,  $w_{ij}$ , ne doivent pas nécessairement être binaires; elles peuvent prendre d'autres valeurs positives, comme la « longueur » de la frontière géographique ou les volumes de trafic aérien entre les deux régions. La matrice de contiguïté  $\mathbf{W}$  étant symétrique, ses valeurs propres sont réelles. Nous désignons la  $i^e$  plus grande valeur propre de  $\mathbf{W}$  par  $\lambda_i(\mathbf{W})$ , de sorte que  $\lambda_m(\mathbf{W}) \leq \dots \leq \lambda_1(\mathbf{W})$ . Puisque  $\mathbf{W}$  n'est pas nulle et que  $\sum_{i=1}^m w_{ii} = 0$ , nous obtenons donc le résultat  $\lambda_m(\mathbf{W}) < 0 < \lambda_1(\mathbf{W})$ . Supposons que  $w_{i.} = \sum_{j=1}^m w_{ij}$  est la somme de la  $i^e$  ligne de  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{L} = \text{diag}\{w_{i.}\}_{i=1}^m$ . En supposant que les éléments diagonaux de  $\mathbf{L}$  sont positifs, c'est-à-dire que toutes les petites régions ont au moins une région voisine, nous définissons  $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{W}$ . Puisque  $\tilde{\mathbf{W}}$  est une matrice stochastique à lignes, toutes ses valeurs propres sont comprises entre  $-1$  et  $1$ , dont au moins une est  $1$ . Par conséquent,  $\lambda_1(\tilde{\mathbf{W}}) = 1$ . De plus,  $\tilde{\mathbf{W}}$  et  $\text{diag}\{w_{i.}^{-1/2}\}_{i=1}^m \mathbf{W} \text{diag}\{w_{i.}^{-1/2}\}_{i=1}^m$  ont le même ensemble de valeurs propres, et cette dernière matrice est symétrique. Donc, toutes les valeurs propres de  $\tilde{\mathbf{W}}$  sont réelles et la valeur  $\lambda_m(\tilde{\mathbf{W}})$  sera négative. Nous considérons quatre dépendances spatiales de rechange associées à des effets aléatoires, qui sont représentées par les matrices de précision définies positives (à l'exclusion du paramètre d'échelle  $\sigma_v^2$ ) :

$$\text{SAR: } \quad \mathbf{\Omega}_2(\rho) = (\mathbf{I}_m - \rho \tilde{\mathbf{W}})^T (\mathbf{I}_m - \rho \tilde{\mathbf{W}}), \quad \rho \in (-1, 1), \quad (2.4)$$

$$\text{SCAR: } \quad \mathbf{\Omega}_3(\rho) = \mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}, \quad \rho \in (\lambda_m(\mathbf{W})^{-1}, \lambda_1(\mathbf{W})^{-1}), \quad (2.5)$$

$$\text{CAR: } \quad \mathbf{\Omega}_4(\rho) = \mathbf{L} - \rho \mathbf{W}, \quad \rho \in (\lambda_m(\tilde{\mathbf{W}})^{-1}, \lambda_1(\tilde{\mathbf{W}})^{-1}), \quad (2.6)$$

$$\text{LCAR: } \quad \mathbf{\Omega}_5(\rho) = \rho \mathbf{R} + (1 - \rho) \mathbf{I}_m, \quad \rho \in (0, 1), \quad (2.7)$$

où  $\rho$  est le paramètre de dépendance spatiale qui représente la force de la dépendance spatiale (Hodges, 2019, chapitre 5.2) et  $\mathbf{R}$  est défini comme  $\mathbf{R} = \mathbf{\Omega}_4(1) = \mathbf{L} - \mathbf{W}$ . Étant donné que les valeurs propres de  $\mathbf{I}_m - \tilde{\mathbf{W}}$  sont comprises entre  $0$  (la plus petite valeur propre) et  $1 - \lambda_m(\tilde{\mathbf{W}})$  (la plus grande valeur propre,  $> 1$ ), la matrice  $\mathbf{R}$  est définie non négative. Chaque matrice de précision est garantie positive et définie tant que  $\rho$  se situe dans l'intervalle précisé dans la définition respective.

La matrice de contiguïté  $\tilde{\mathbf{W}}$  du modèle autorégressif simultané (SAR) (Whittle, 1954) est normalisée par ligne, de sorte que  $\rho$  peut varier de  $-1$  à  $1$  tout en préservant la définition positive (Banerjee, Carlin et Gelfand, 2003, chapitre 4.4). Le modèle (2.5) est une version simple du modèle autorégressif conditionnel (CAR pour *conditional autoregressive* en anglais) (Rao et Molina, 2015, chapitre 9.6.2), où les entrées diagonales de la matrice de précision sont toutes égales à  $1$ . Même si les éléments diagonaux d'une matrice de précision sont tous égaux, les éléments diagonaux de l'inverse peuvent ne pas tous être égaux, ce qui entraîne l'hétéroscédasticité des effets aléatoires. Nous appelons ce modèle le modèle autorégressif conditionnel simple (SCAR pour *simple conditional autoregressive* en anglais). Le modèle (2.6) est un modèle autorégressif conditionnel largement utilisé (CAR; Banerjee et coll., 2003; Besag et

Kooperberg, 1995; You et Zhou, 2011), où les entrées diagonales de la matrice de précision sont le nombre de quartiers de la région correspondante. La limite supérieure de  $\rho$  est  $\lambda_1(\tilde{\mathbf{W}})^{-1}=1$ , et dans le cas de  $\rho=1$ , le modèle avec  $\mathbf{\Omega}_4(1)$  est appelé le modèle autorégressif intrinsèque (IAR pour *intrinsic autoregressive* en anglais) (Banerjee et coll., 2003, chapitre 4.3). Le modèle (2.7) est un modèle autorégressif conditionnel, appelé autorégressif conditionnel de Leroux (LCAR pour *Leroux's conditional autoregressive* en anglais), dont la matrice de précision est donnée par la combinaison convexe de  $\mathbf{R} = \mathbf{\Omega}_4(1)$  et  $\mathbf{I}_m$ . Ce modèle a été examiné par Leroux, Lei et Breslow (2000); MacNab (2003); You et Zhou (2011), où le  $i^{\text{e}}$  élément diagonal de  $\mathbf{R}$  est le nombre de quartiers de la  $i^{\text{e}}$  petite région et le  $(i, j)^{\text{e}}$  élément extradiagonal est de  $-1$  si les  $i^{\text{e}}$  et  $j^{\text{e}}$  petites régions sont connectées, sinon il est de 0.

Les modèles autorégressifs conditionnels, le modèle SCAR, le modèle CAR et le modèle LCAR, supposent que  $\theta_i$  dépend uniquement des moyennes de petites régions voisines. En d'autres termes,  $\theta_i$  est corrélé avec les  $\theta_j$ ,  $j \neq i$ , uniquement par les moyennes des régions environnantes. Au contraire, le modèle SAR suppose que  $\theta_i$  dépend de tous les autres  $\theta_j$  en même temps,  $j \neq i$ , mais a des corrélations plus fortes (plus faibles) pour les régions avoisinantes (éloignées). Le modèle FH à effets aléatoires indépendants peut être considéré comme un cas spécial du modèle SAR, SCAR ou LCAR où  $\rho=0$ . Pour des raisons de commodité, nous incluons le modèle FH à effets aléatoires indépendants dans notre modèle en adoptant sa matrice de précision  $\mathbf{\Omega}_1(\rho) = \mathbf{I}_m$ , bien qu'elle soit exempte de  $\rho$ .

Nous considérons les modèles spatiaux HB suivants en intégrant les cinq dépendances spatiales définies en (2.4) à (2.7) :

$$\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho \sim N_m(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{D}), \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho \sim N_m(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2 \{\boldsymbol{\Omega}_k(\rho)\}^{-1}), \quad k=1, \dots, 5, \quad (2.9)$$

$$\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho) \propto g(\sigma_v^2) h(\rho), \quad \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p, \sigma_v^2 > 0, l_k < \rho < u_k, \quad (2.10)$$

où  $\sigma_v^2$  est le paramètre de l'échelle du modèle,  $g(\sigma_v^2)$  et  $h(\rho)$  sont des fonctions appropriées de  $\sigma_v^2$  et  $\rho$ ,  $l_k$  et  $u_k$  sont les limites inférieure et supérieure de  $\rho$  sous le  $k^{\text{e}}$  modèle. Nous évitons le terme « variance d'erreur du modèle » pour  $\sigma_v^2$ , car les entrées diagonales de  $\boldsymbol{\Omega}_k(\rho)$  varient d'une petite région à l'autre et n'égalent pas nécessairement toutes 1.

## 2.2 Estimation des moyennes de population pour les petites régions non échantillonnées

Dans la présente section, nous examinons le cas où, dans l'enquête, plusieurs petites régions non échantillonnées n'ont pas d'estimations directes. Dans de nombreuses applications, les ressources limitées empêchent souvent l'inclusion de nombreuses sous-populations dans l'échantillon; il en résulte de petites régions non échantillonnées. Les petites régions non échantillonnées sont parfois appelées « régions non harmonisées » (Trevisani et Gelfand, 2013) lorsqu'elles découlent d'un manque de concordance des domaines entre l'estimation directe et les variables auxiliaires. Pour n'importe laquelle de ces régions non échantillonnées, la prédiction de sa moyenne à partir de n'importe quel modèle non spatial est fondée

uniquement sur son estimateur synthétique. Nous proposons d'exploiter les dépendances spatiales dans la prédiction des moyennes de petites régions non échantillonnées. Les prédictions des modèles proposés sont obtenues en modifiant l'estimateur synthétique, à l'aide du vecteur des résidus de régression, en mettant davantage l'accent sur les résidus de régression des régions avoisinantes.

Sans perte de généralité, supposons qu'il y ait  $m_1$  petites régions non échantillonnées et que  $Y_{m_1+1}, \dots, Y_m$  sont les estimations directes de  $m_2 = m - m_1$  petites régions échantillonnées. En nous fondant sur les estimations directes de  $m_2$  régions échantillonnées, nous considérons les modèles HB suivants :

$$\mathbf{Y}_{(2)} | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho \sim N_{m_2}(\boldsymbol{\theta}_{(2)}, \mathbf{D}_{(2)}), \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho \sim N_m(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2 \{\boldsymbol{\Omega}_k(\rho)\}^{-1}), \quad k=1, \dots, 5, \quad (2.12)$$

$$\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho) \propto g(\sigma_v^2) h(\rho), \quad \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p, \sigma_v^2 > 0, l_k < \rho < u_k, \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{Y}_{(2)} = (Y_{m_1+1}, \dots, Y_m)^\top$ ,  $\mathbf{D}_{(2)} = \text{diag}\{D_i\}_{i=m_1+1}^m$  et  $\boldsymbol{\theta}_{(2)} = (\theta_{m_1+1}, \dots, \theta_m)^\top$ , qui est le sous-vecteur de  $\boldsymbol{\theta}$  correspondant aux régions échantillonnées.

### 2.3 Propriété des distributions *a posteriori*

Dans la présente section, nous établissons la pertinence des distributions *a posteriori* des modèles spatiaux de petites régions données en (2.8) à (2.10) et (2.11) à (2.13). Supposons que  $I(\cdot)$  est la fonction indicatrice prenant la valeur 1 lorsque son argument est vrai, sinon 0. Nous fournissons d'abord les conditions générales de la pertinence *a posteriori* des modèles proposés.

**Théorème 1.** Pour tous les modèles spatiaux HB donnés en (2.8) à (2.10) et (2.11) à (2.13), les fonctions de densité de probabilité *a posteriori* sont appropriées si les conditions suivantes se maintiennent pour une certaine constante positive  $c > 0$  :

- (a)  $\int_0^\infty g(\sigma_v^2) I(\sigma_v^2 \leq c) d\sigma_v^2 < \infty$ .
- (b)  $\int_0^\infty (\sigma_v^2)^{-(m^* - p)/2} g(\sigma_v^2) I(\sigma_v^2 > c) d\sigma_v^2 < \infty$ .
- (c)  $\int_{l_k}^{u_k} h(\rho) d\rho < \infty$ ,

où  $m^* = m$  pour (2.8) à (2.10), et  $m^* = m - m_1$  pour (2.11) à (2.13).

Si  $g(\cdot)$  est une fdp appropriée, alors (a) est vrai automatiquement et (b) est satisfait si  $m^* \geq p$ . La condition  $m^* \geq p$  est évidente, car au moins  $p$  observations sont nécessaires pour estimer  $p$  composantes de  $\boldsymbol{\beta}$  lorsque aucune information de fond à son sujet n'est disponible. De plus, toute fonction bornée de  $\rho$  satisfait à (c) dans le théorème 1, étant donné que leurs supports sont toutes bornées. En particulier, dans la famille populaire des distributions *a priori* non informatives, les fdp *a posteriori* sont adéquates dans les conditions suivantes.

$$\pi(\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho) \propto (\sigma_v^2)^{-\alpha} I(l_k < \rho < u_k), \quad \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p, \sigma_v^2 > 0, \quad (2.14)$$

**Corollaire 1.** Pour n'importe lequel des modèles spatiaux HB donnés en (2.8) et (2.9) et (2.11) et (2.12) avec la distribution *a priori* mentionnée en (2.14), la fdp *a posteriori* est adéquate, tant que  $\alpha < 1$  et  $m^* > p + 2 - 2\alpha$ .

Pour ce qui est de la distribution *a priori* uniforme comportant  $\alpha = 0$  (qui sera utilisée dans le présent article), la pertinence *a posteriori* des distributions pour les modèles (2.8) et (2.9) est garantie tant que le nombre de petites régions est supérieur à  $p + 2$ . Pour les modèles incorporant des régions non échantillonnées indiquées en (2.11) et (2.12), la deuxième condition du corollaire 1.1 devient  $m - m_1 > p + 2$ , et par conséquent, les fdp *a posteriori* sont adéquates tant que le nombre de régions non échantillonnées est inférieur à  $m - p - 2$ , ou qu'au moins  $p + 3$  régions ont un échantillon.

### 3. Simulation de distributions *a posteriori*

Dans la présente section, nous illustrons les étapes d'échantillonnage de rejet pour obtenir des échantillons indépendants *a posteriori* à partir des distributions *a posteriori* des modèles proposés. Nous supposons que les composantes du vecteur de la moyenne de petites régions  $\boldsymbol{\theta}$  sont disposées de façon que  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_{(1)}^\top, \boldsymbol{\theta}_{(2)}^\top)^\top$ , où  $\boldsymbol{\theta}_{(1)} \in \mathbb{R}^{m_1}$  et  $\boldsymbol{\theta}_{(2)} \in \mathbb{R}^{m_2}$  sont les vecteurs de la moyenne de petites régions correspondant aux régions non échantillonnées et échantillonnées, respectivement. Pour des raisons de commodité, nous désignons la matrice de précision du  $k^e$  modèle spatial par  $\boldsymbol{\Omega} = (\sigma_v^2)^{-1} \boldsymbol{\Omega}_k(\rho)$  et l'intervalle admissible de  $\rho$  par  $(l, u)$  en supprimant l'indice du modèle  $k$ .

Nous calculons d'abord la densité *a posteriori* marginale de  $(\sigma_v^2, \rho)$  et nous fournissons les procédures d'échantillonnage subséquentes. Supposons que  $\mathbf{0}_{m_2 \times m_1}$  est la matrice nulle  $m_2 \times m_1$  et que  $\mathbf{M} = [\mathbf{0}_{m_2 \times m_1}, \mathbf{I}_{m_2}]$ , de sorte que  $\boldsymbol{\theta}_{(2)} = \mathbf{M}\boldsymbol{\theta}$ . Supposons également que  $\mathbf{X}_{(2)} = \mathbf{M}\mathbf{X}$ . Si l'on n'intègre pas  $\boldsymbol{\theta}$  dans le modèle (2.11) et (2.12), nous avons  $\mathbf{Y}_{(2)} | \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho \sim N_{m_2}(\mathbf{X}_{(2)}\boldsymbol{\beta}, \Delta)$ , où  $\Delta = \mathbf{D}_{(2)} + \mathbf{M}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{M}^\top$ . La marginalisation subséquente de  $\boldsymbol{\beta}$  donne la densité *a posteriori* marginale  $p(\sigma_v^2, \rho | \mathbf{y}_{(2)})$  comme suit :

$$p(\sigma_v^2, \rho | \mathbf{y}_{(2)}) \propto \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{y}_{(2)}^\top \Delta^{-1} \left\{ \Delta - \mathbf{X}_{(2)} (\mathbf{X}_{(2)}^\top \Delta^{-1} \mathbf{X}_{(2)})^{-1} \mathbf{X}_{(2)}^\top \right\} \Delta^{-1} \mathbf{y}_{(2)}\right]}{|\Delta|^{1/2} |\mathbf{X}_{(2)}^\top \Delta^{-1} \mathbf{X}_{(2)}|^{1/2}} I(l < \rho < u). \quad (3.1)$$

De plus, nous avons des distributions *a posteriori* conditionnelles de  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\boldsymbol{\theta}$  qui sont :

$$\boldsymbol{\beta} | \sigma_v^2, \rho, \mathbf{y} \sim N_p(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\Gamma}), \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho, \mathbf{y} \sim N_m(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Psi}), \quad (3.3)$$

où  $\boldsymbol{\Gamma} = (\mathbf{X}_{(2)}^\top \Delta^{-1} \mathbf{X}_{(2)})^{-1}$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{X}_{(2)}^\top \Delta^{-1} \mathbf{y}_{(2)}$ ,  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{y}_* - \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{y}_* - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ ,  $\mathbf{y}_* = (\mathbf{0}_{m_1}^\top, \mathbf{y}_{(2)}^\top)^\top$ , et  $\boldsymbol{\Psi}^{-1} = \mathbf{M}^\top \mathbf{D}_{(2)}^{-1} \mathbf{M} + \boldsymbol{\Omega}$ . Par conséquent, nous pouvons obtenir un échantillon indépendant *a posteriori* par échantillonnage de rejet à partir de (3.1) et d'échantillonnages subséquents à partir de (3.2) et de (3.3). Pour les données sans région non échantillonnée, nous obtenons des procédures d'échantillonnage souhaitées en établissant que  $\mathbf{M} = \mathbf{I}_m$  et  $\mathbf{y}_* = \mathbf{y}$ .

## 4. Étude par simulations

Dans la présente section, nous comparons les performances de prédiction du modèle FH à effets aléatoires indépendants et des quatre modèles spatiaux en l'absence de covariables informatives ayant de multiples régions non échantillonnées. À l'exclusion d'Hawaï et de l'Alaska, nous prenons en compte les  $m = 49$  États contigus des États-Unis, y compris le District de Columbia. Pour évaluer la qualité de la prédiction en l'absence d'estimations directes, nous ne simulons pas d'estimations directes de  $m_1 = \lfloor 0,15m \rfloor = 7$  États choisis au hasard. Ces régions sont le Delaware, le Massachusetts, le Michigan, le Nebraska, le Rhode Island, le Dakota du Sud et le Texas. Il en résulte  $m_2 = 42$  régions qui ont des estimations directes.

Pour rendre les contextes de simulation réalistes, nous reproduisons les données de 1989 sur le revenu médian familial de quatre personnes (revenu médian) décrites à la section 5. Nous générons des ensembles de données répétés de façon à ce que les valeurs I de Moran pour chaque moyenne de petite région répétée,  $\theta_1, \dots, \theta_m$ , soient approximativement centrées autour de 0,44, soit la valeur I de Moran pour le revenu médian du recensement de 1990. Les estimations directes sont générées à l'aide des variances d'échantillonnage  $D_1, \dots, D_{m_2}$  des estimations de la Current Population Survey (CPS) de 1990. Ces variances d'échantillonnage de petites régions échantillonnées vont de 1,95 à 25,03 et la moyenne est de 9,08, lorsque les montants en dollars sont mis à l'échelle de 1 000 \$. Pour chaque paramètre, nous considérons  $S = 100$  ensembles de données répétés.

*Génération de données :* Supposons que  $\bar{D} = m_2^{-1} \sum_{i=1}^{m_2} D_i$  et que  $\mathbf{D}_{(2)} = \text{diag}\{D_i\}_{i=1}^{m_2}$ . Nous établissons que  $\rho = 0,85$  et  $\sigma_v^2 = \bar{D}/2$  et nous considérons deux covariables indépendantes  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  avec une dépendance spatiale SAR, c'est-à-dire  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \sim N_m(\mathbf{0}_m, \{\Omega_3(\rho)\}^{-1})$ . Ensuite, nous supposons que  $(\beta_1, \beta_2)^\top = (2, 1)^\top$  et  $\boldsymbol{\mu} = \beta_1 \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2$ , nous générons des moyennes de petites régions et des estimations directes à partir du modèle FH à effets aléatoires indépendants suivant :

$$\boldsymbol{\theta} \sim N_m(\boldsymbol{\mu}, \sigma_v^2 \mathbf{I}_m), \quad \mathbf{Y}_{(2)} \mid \boldsymbol{\theta}_{(2)} \sim N_{m_2}(\boldsymbol{\theta}_{(2)}, \mathbf{D}_{(2)}),$$

où les composantes de  $\mathbf{Y}_{(2)}$  et  $\boldsymbol{\theta}_{(2)}$  correspondent aux  $m_2$  petites régions échantillonnées, tel que nous l'avons défini dans l'équation (2.13) ci-dessous. La covariable  $\mathbf{x}_1$  ( $\mathbf{x}_2$ ) introduit un schéma spatial plus fort (plus faible) par rapport aux  $\theta_i$ , et par conséquent, nous appelons  $\mathbf{x}_1$  ( $\mathbf{x}_2$ ) la covariable forte (faible). Les valeurs I de Moran pour 100 petites régions répétées vont de 0,115 à 0,713, et la moyenne est de 0,449.

Nous considérons deux cadres de covariables différents pour examiner la façon dont les modèles spatiaux peuvent saisir la variabilité supplémentaire introduite par la dépendance spatiale à partir d'une covariable manquante, c'est-à-dire  $\mathbf{X} = [\mathbf{1}_m, \mathbf{x}_2]$  et  $\mathbf{X} = [\mathbf{1}_m, \mathbf{x}_1]$ , où  $\mathbf{1}_m$  représente le vecteur à  $m$  composantes des valeurs 1. L'exclusion des covariables du modèle ajusté laissera la variation spatiale de cette covariable au niveau résiduel. Nous ne considérons pas que le modèle complet comprend les deux covariables, puisque ce modèle permettra de cerner pleinement  $\boldsymbol{\mu}$  et ne laissera aucune variabilité spatiale inexplicée; par conséquent, le modèle FH à effets aléatoires indépendants sera suffisant pour bien saisir la variabilité des effets aléatoires i.i.d.

*Simulations a posteriori* : Pour tous les modèles proposés, des échantillons indépendants *a posteriori* peuvent être obtenus au moyen du plan d'échantillonnage de rejet décrit à la section 3. La procédure d'échantillonnage commence par l'échantillonnage de rejet de la distribution marginale *a posteriori* de  $(\sigma_v^2, \rho)$  et se poursuit par des échantillonnages successifs du reste des paramètres issus des distributions conditionnelles *a posteriori*. Cependant, lorsque la densité marginale *a posteriori* de  $(\sigma_v^2, \rho)$  est concentrée au niveau ou autour des limites de  $\rho$ , une loi instrumentale doit être soigneusement définie pour avoir un taux d'acceptation suffisamment élevé, ce qui peut nécessiter une spécification adaptative d'une loi instrumentale pour chaque ensemble de données répété. Pour éviter de telles difficultés, nous utilisons l'algorithme Monte Carlo hamiltonien avec le progiciel `rstan` en R (Stan Development Team, 2018). Nous adaptons le modèle HB (2.11) à (2.13) à chaque combinaison de covariables pour  $k=1, \dots, 5$ . Pour chaque modèle, nous utilisons quatre chaînes Monte Carlo hamiltoniennes parallèles (échantillonneur sans demi-tour) pour 2 500 itérations après 5 000 itérations de rodage. Nous conservons chaque dixième itération et concaténons les quatre chaînes pour obtenir un échantillon *a posteriori* d'une taille de 10 000. Les codes R qui mettent en œuvre l'étape d'échantillonnage de rejet décrite à la section 3 et les modèles `stan` sont disponibles à l'adresse [https://github.com/heeck31/spatial\\_sae](https://github.com/heeck31/spatial_sae).

*Mesures de la performance* : Au moyen de l'échantillon *a posteriori* pour chaque modèle, nous prédisons le vrai vecteur de moyenne sur petites régions,  $\boldsymbol{\theta}^{(s)} = (\theta_1^{(s)}, \dots, \theta_m^{(s)})^\top$ , du  $s^{\text{e}}$  ensemble de données répété en utilisant la moyenne *a posteriori*, que nous désignons par  $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(s)} = (\hat{\theta}_1^{(s)}, \dots, \hat{\theta}_m^{(s)})^\top$ . Supposons que  $\mathcal{A}$  est un sous-ensemble de  $\{1, \dots, m\}$ , qui est déterminé uniquement par les indices de petites régions échantillonnées ou non échantillonnées. Pour un sous-ensemble donné  $\mathcal{A}$ , nous calculons l'erreur quadratique moyenne de prédiction,  $\text{EQMP}^{(s)} = \sum_{i \in \mathcal{A}} (\hat{\theta}_i^{(s)} - \theta_i^{(s)})^2 / m_{\mathcal{A}}$ , où  $m_{\mathcal{A}} = |\mathcal{A}|$  est le nombre de régions dans  $\mathcal{A}$ . Nous calculons ensuite l'EQMP<sup>(s)</sup> sur  $S$  répétitions pour calculer la moyenne empirique de l'erreur quadratique moyenne de prédiction (meEQMP), où :

$$\text{meEQMP} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \text{EQMP}^{(s)} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \frac{1}{m_{\mathcal{A}}} \sum_{i \in \mathcal{A}} (\hat{\theta}_i^{(s)} - \theta_i^{(s)})^2. \quad (4.1)$$

Nous évaluons également l'incertitude des prévisions à l'aide de l'écart-type moyen *a posteriori* (ETMP) défini comme  $S^{-1} \sum_{s=1}^S m_{\mathcal{A}}^{-1} \sum_{i \in \mathcal{A}} \text{é.t.}(\theta_i^{(s)})$ , où  $\text{é.t.}(\theta_i^{(s)})$  est l'écart-type *a posteriori* de  $\theta_i$ . En établissant le modèle FH à effets aléatoires indépendants comme modèle de référence, nous considérons les ratios suivants :

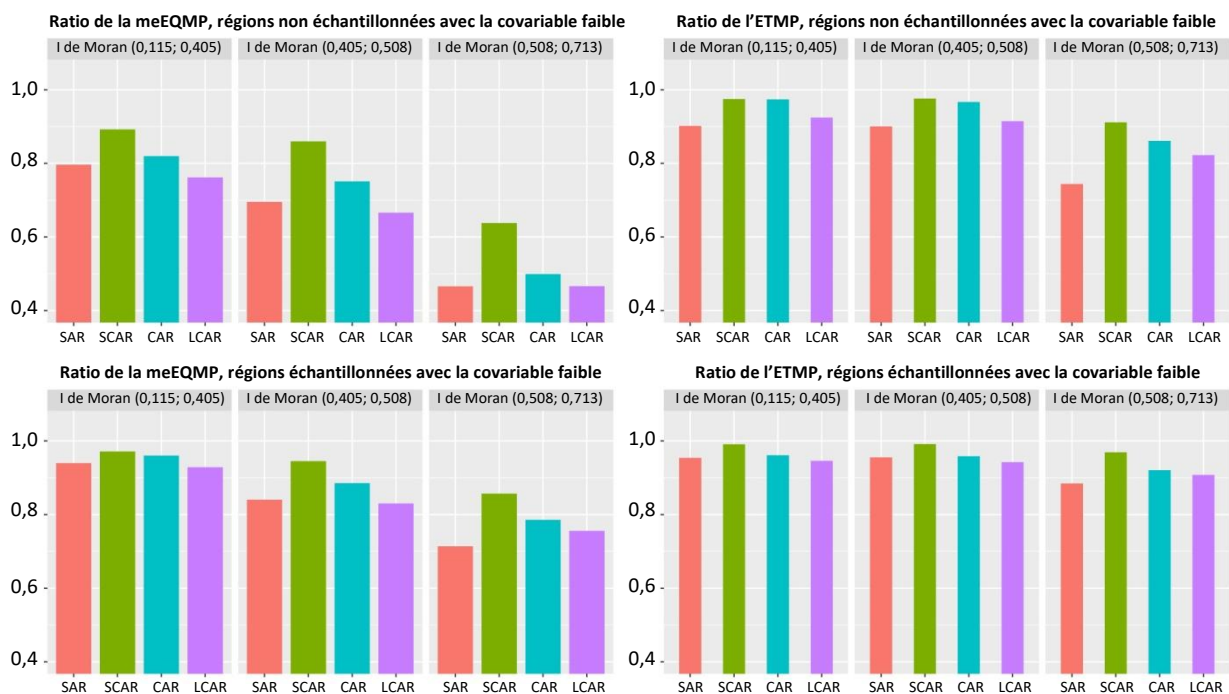
$$\text{meEQMP} - \text{Ratio}_k = \frac{\text{meEQMP}_k}{\text{meEQMP}_1}, \quad \text{ETMP} - \text{Ratio}_k = \frac{\text{ETMP}_k}{\text{ETMP}_1}, \quad (4.2)$$

où l'indice  $k$  indique que la quantité est calculée à partir de l'échantillon *a posteriori* selon le  $k^{\text{e}}$  modèle. Ces ratios mesurent les améliorations de la meEQMP et de l'ETMP obtenues en adaptant un modèle spatial au modèle FH à effets aléatoires indépendants. Un rapport inférieur à 1 indique la supériorité du modèle spatial, sinon le modèle FH à effets aléatoires indépendants est meilleur. Plus le rapport est petit, plus le modèle spatial est supérieur.

*Comparaison de modèles* : Divers graphiques à la figure 4.1 résument les ratios lorsque la covariable forte  $\mathbf{x}_1$  est exclue des modèles ajustés. Nous classons en trois groupes les ratios meEQMP et ETMP selon

chaque répétition, en fonction des valeurs I de Moran des  $\theta_j$ , c'est-à-dire les tiers inférieur, intermédiaire et supérieur, respectivement. La première ligne résume les résultats des prévisions pour les sept régions non échantillonnées. Comme prévu, les modèles spatiaux montrent une amélioration remarquable de la meEQMP et de l'ETMP; les améliorations sont plus importantes lorsque les valeurs I de Moran sont plus élevées. En ce qui concerne la meEQMP, les modèles SAR et LCAR produisent au moins 20 %, 30 % et 50 % de prédictions plus précises lorsque les valeurs I de Moran se trouvent dans le premier, le deuxième et le troisième groupe, respectivement. Pour ce qui est de l'incertitude de prédiction, les prédictions des modèles SAR et LCAR ont un ETMP 10 % inférieur pour le premier et le deuxième groupe. Dans le troisième groupe, le modèle SAR montre une réduction de l'ETMP de plus de 25 %.

**Figure 4.1** Ratio de la moyenne empirique de l'erreur quadratique moyenne de prédiction (meEQMP) et ratio de l'écart-type moyen *a posteriori* (ETMP) pour les prédictions avec la covariable faible.



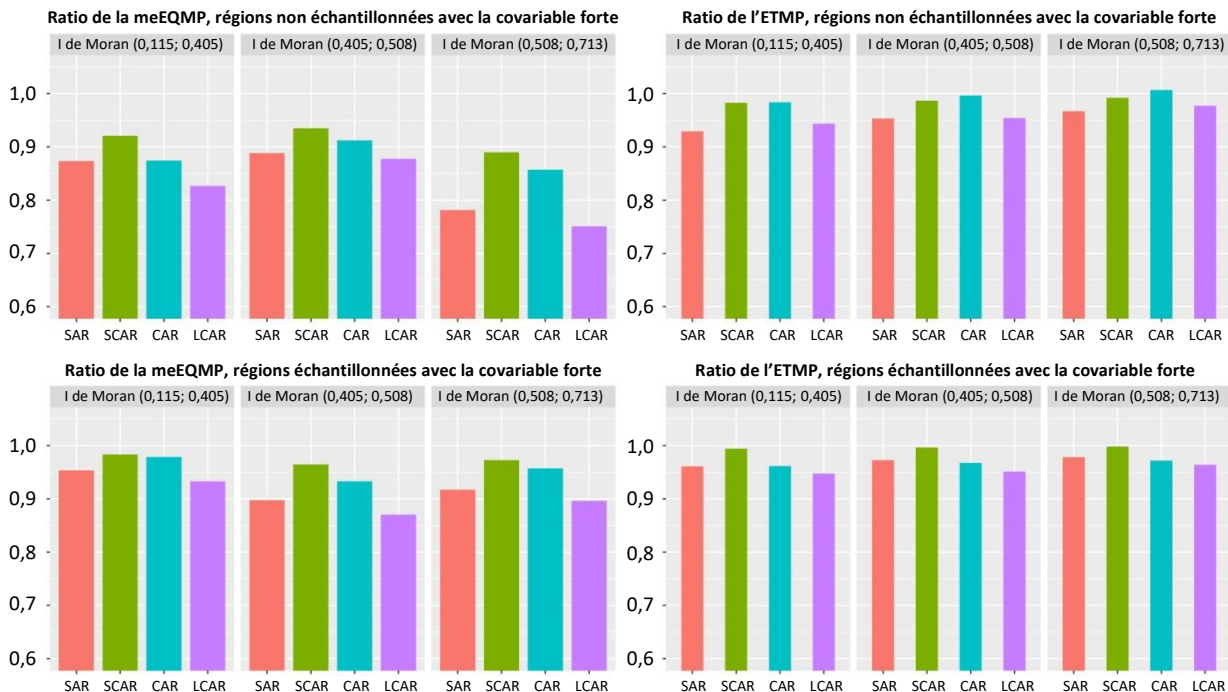
- Des barres verticales sont dessinées pour les ratios : une barre plus courte que 1 représente une meilleure (plus petite) meEQMP ou ETMP pour le modèle correspondant par rapport au modèle Fay-Herriot (FH) à effets aléatoires indépendants.
- SAR = autorégressif simultané, SCAR = autorégressif conditionnel simple, CAR = autorégressif conditionnel, LCAR = autorégressif conditionnel de Leroux, meEQMP = Moyenne empirique de l'erreur quadratique moyenne de prédiction, ETMP = Écart-type moyen *a posteriori*.

Pour les régions échantillonnées ayant des estimations directes, les améliorations de la meEQMP sont inférieures à 10 % pour le premier groupe, mais supérieures à 15 % et à 25 % pour les deuxième et troisième groupes (regroupés selon les valeurs I de Moran), respectivement. De plus, les prévisions des modèles spatiaux ont un niveau d'incertitude plus faible, et pour le troisième groupe, les prévisions des modèles SAR ont un ETMP inférieur de plus de 10 %.

De même, divers graphiques de la figure 4.2 résument les ratios lorsque la covariable faible  $x_2$  est exclue des modèles ajustés. En général, les modèles spatiaux continuent de générer de meilleures prédictions par rapport au modèle FH à effets aléatoires indépendants. Le modèle LCAR donne la

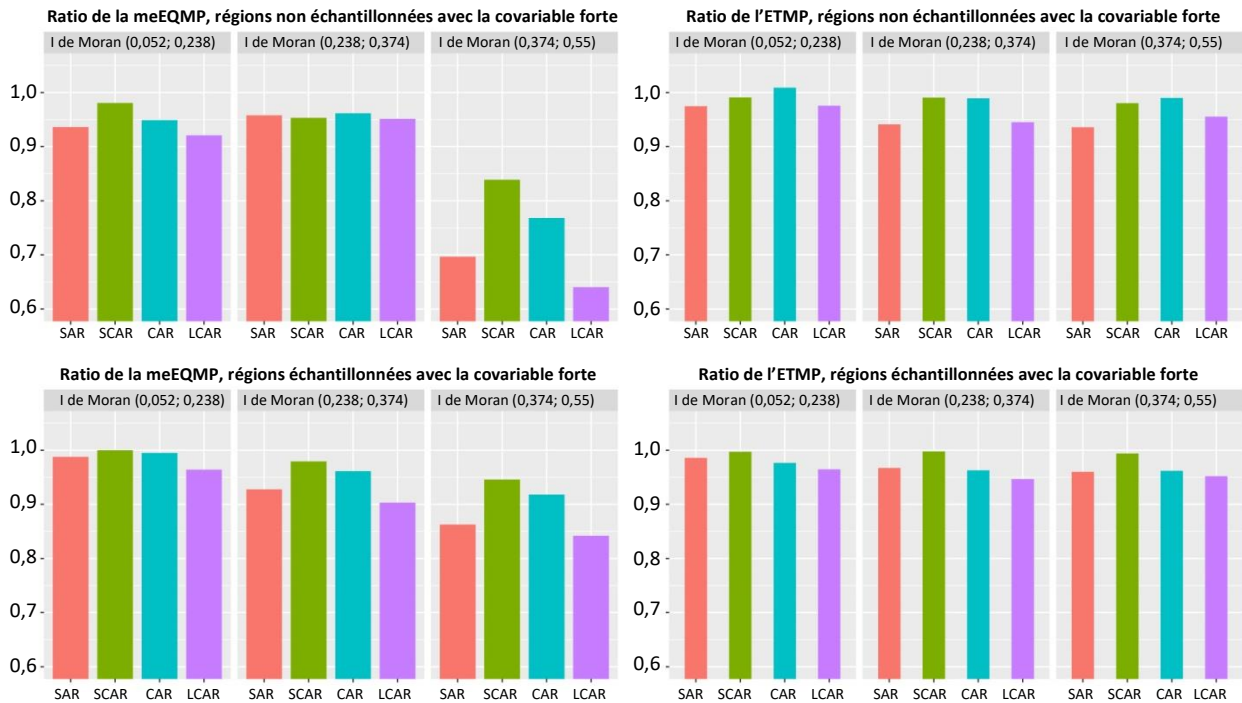
meilleure performance globale pour les sept régions non échantillonnées, ce qui se traduit par une réduction de plus de 10 % de la meEQMP pour le premier et le deuxième groupe, respectivement, et d'environ 25 % pour le troisième groupe. Pour ce qui est de l'incertitude, les modèles spatiaux montrent un ETMP inférieur de plus de 5 %, mais de moins de 10 %. Pour les petites régions échantillonnées, les modèles SAR et LCAR montrent une réduction de la meEQMP d'environ 5 % à 13 %, mais les réductions de l'ETMP sont inférieures à 5 %. Contrairement aux résultats précédents comportant une covariable faible, les améliorations apportées à la meEQMP et à l'ETMP sont comparables dans trois groupes qui sont classés selon les valeurs I de Moran. Ceci est dû au fait que les valeurs I de Moran pour les moyennes de petites régions sont principalement déterminées par la covariable forte, et une fois que celle-ci est présente dans le modèle pour expliquer la variabilité spatiale, la variabilité spatiale des résidus ne varie pas de façon marquée entre les trois groupes. Nous regroupons les ratios en fonction des valeurs I de Moran pour les résidus obtenus par régression de la covariable forte sur les moyennes de petites régions, et nous résumons les ratios à la figure 4.3. Dans le cadre de cette catégorisation, le modèle LCAR présente la meilleure performance, montrant des réductions de 5 %, 10 % et 15 % de la meEQMP pour le premier, le deuxième et le troisième groupe, respectivement. On peut aussi voir que plus la valeur I de Moran est grande, plus les modèles spatiaux permettent des améliorations.

**Figure 4.2 Ratio de la moyenne empirique de l'erreur quadratique moyenne de prédiction (meEQMP) et ratio de l'écart-type moyen *a posteriori* (ETMP) pour les prédictions de moyennes de petites régions non échantillonnées et échantillonnées avec la covariable forte.**



- Des barres verticales sont dessinées pour les ratios : une barre plus courte que 1 représente une meilleure (plus petite) meEQMP ou ETMP pour le modèle correspondant par rapport au modèle Fay-Herriot (FH) à effets aléatoires indépendants.
- SAR = autorégressif simultané, SCAR = autorégressif conditionnel simple, CAR = autorégressif conditionnel, LCAR = autorégressif conditionnel de Leroux, meEQMP = Moyenne empirique de l'erreur quadratique moyenne de prédiction, ETMP = Écart-type moyen *a posteriori*.

**Figure 4.3** Ratio de la moyenne empirique de l'erreur quadratique moyenne de prédiction (meEQMP) et ratio de l'écart-type moyen *a posteriori* (ETMP) pour les prédictions de moyennes de petites régions non échantillonnées et échantillonnées avec la covariable forte.



- Les résultats sont regroupés selon la valeur I de Moran pour les résidus, où les résidus sont obtenus par une régression de la covariable forte sur les moyennes de petites régions. Des barres verticales sont dessinées pour les ratios : une barre plus courte que 1 représente une meilleure (plus petite) meEQMP ou ETMP pour le modèle correspondant par rapport au modèle Fay-Herriot (FH) à effets aléatoires indépendants.
- SAR = autorégressif simultané, SCAR = autorégressif conditionnel simple, CAR = autorégressif conditionnel, LCAR = autorégressif conditionnel de Leroux, meEQMP = Moyenne empirique de l'erreur quadratique moyenne de prédiction, ETMP = Écart-type moyen *a posteriori*.

## 5. Application aux données de la Current Population Survey

Dans la présente section, nous évaluons l'exactitude des prédictions des modèles spatiaux pour certains revenus médians de la population au niveau de l'État. Le Department of Health and Human Service (le département de la Santé et des Services sociaux des États-Unis) avait besoin chaque année de données exactes sur les revenus médians pour que les États mettent en œuvre un programme d'aide sociale. Bien que des données exactes sur le revenu médian national soient disponibles à partir de la Current Population Survey (CPS), celles-ci ne fournissent pas de renseignements exacts sur le revenu médian au niveau de l'État. Pour fournir des statistiques exactes au Department of Health and Human Service, le U.S. Census Bureau a envisagé des méthodes d'estimation sur petites régions fondées sur des modèles, au moyen des données auxiliaires provenant d'autres programmes fédéraux. Nous appliquons les modèles spatiaux proposés pour estimer le revenu médian familial de quatre personnes en 1989 pour les 49 États américains contigus, y compris le District de Columbia. Nous utilisons les estimations directes de la CPS de 1990 et comparons nos prédictions avec les statistiques plus fiables issues du *questionnaire complet* du recensement de 1990, c'est-à-dire que nous considérons les statistiques du questionnaire complet du recensement de 1990 comme constituant des valeurs réelles. Les performances de prédiction sont mesurées à l'aide de toutes les petites régions et d'un sous-ensemble de régions après avoir exclu de multiples estimations directes.

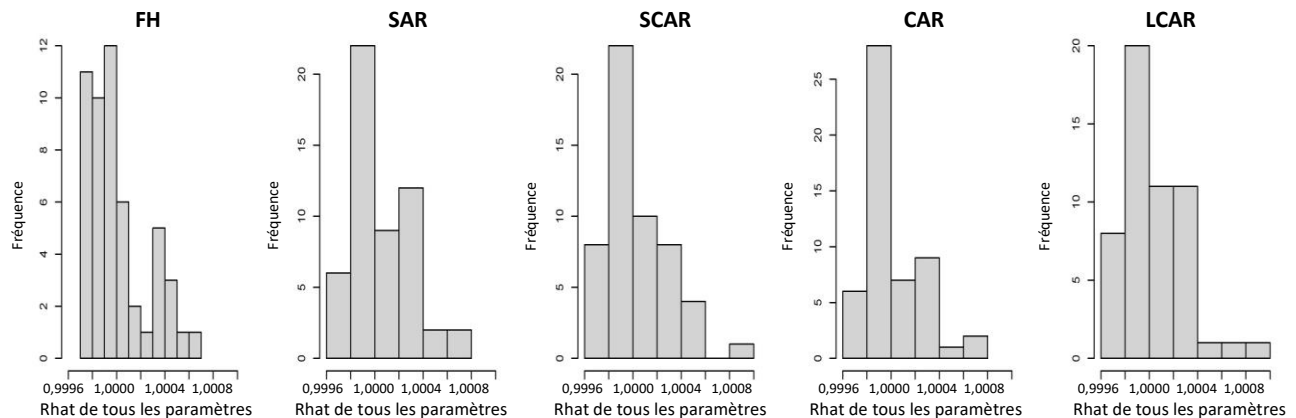
## 5.1 Estimation du revenu médian familial de quatre personnes

Supposons que  $\theta_i$  est le véritable revenu médian familial de quatre personnes du  $i^{\circ}$  État pour l'année 1989, où  $i=1, \dots, 49$ . Les États de l'Alaska et d'Hawaï sont exclus parce qu'ils ne sont pas géographiquement rattachés au continent. Supposons que  $Y_i$  est l'estimation directe de  $\theta_i$  selon la CPS de 1990. Les covariables d'intérêt sont le revenu médian du recensement de 1980  $x_{i1}$  et le revenu médian rajusté du recensement de 1980  $x_{i2}$ . Le revenu médian rajusté du recensement  $x_{i2}$  est défini comme  $(\text{PCI}_{i,1989} / \text{PCI}_{i,1979}) x_{i1}$ ,  $i=1, \dots, m$ , où  $\text{PCI}_{i,1979}$  et  $\text{PCI}_{i,1989}$  sont les revenus par habitant de 1979 et 1989 du  $i^{\circ}$  État fournis par le Bureau of Economic Analysis du département du Commerce des États-Unis. On sait que le revenu médian rajusté du recensement est une bonne covariable qui tient très efficacement compte de la variabilité du revenu médian des petites régions.

Dans la distribution *a priori* non informative (2.14) où  $\alpha = 0$ , nous intégrons les cinq modèles décrits en (2.8) à (2.10) avec  $\mathbf{X} = [\mathbf{I}_m, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$  et  $\mathbf{X} = [\mathbf{I}_m, \mathbf{x}_1]$ , où pour le deuxième paramètre de covariable, nous excluons du modèle ajusté le revenu médian rajusté du recensement. Pour chaque modèle considéré, nous exécutons 4 chaînes Monte Carlo hamiltoniennes parallèles pour 2 500 itérations après 5 000 itérations de rodage à l'aide du progiciel *rstan* (Stan Development Team, 2018). Nous conservons chaque 10<sup>e</sup> itération et concaténons les quatre chaînes pour obtenir un échantillon *a posteriori* de 10 000. Pour l'ensemble des modèles et des paramètres, les facteurs potentiels de réduction d'échelle ( $\hat{R}$ ; Gelman et Rubin, 1992) sont tous des facteurs qui indiquent qu'il n'y a pas de manque de convergence. Les facteurs potentiels de réduction d'échelle sont présentés à la figure 5.1 et au tableau 5.1.

À l'aide des moyennes *a posteriori*,  $\hat{\theta}_i$ , nous calculons les erreurs quadratiques de prédiction à partir des moyennes respectives  $\theta_i$  et obtenons l'erreur quadratique moyenne de prédiction (EQMP), définie à la section 4, en faisant la moyenne des  $m=49$  écarts quadratiques. Les écarts-types moyens *a posteriori* (ETMP) associés aux  $\hat{\theta}_i$  sont utilisés pour quantifier l'incertitude des prévisions, et le critère d'information largement applicable (WAIC pour *widely applicable information criterion*; Watanabe et Opper, 2010) est utilisé pour évaluer et comparer les modèles, où une valeur WAIC plus petite indique un meilleur ajustement du modèle.

**Figure 5.1** Le facteur potentiel de réduction d'échelle  $\hat{R}$  de tous les paramètres, lorsqu'il n'y a aucune région non échantillonnée.



- Toutes les valeurs correspondent essentiellement à 1, ce qui indique qu'il n'y a aucune preuve d'absence de convergence.
- FH = Fay-Herriot, SAR = autorégressif simultané, SCAR = autorégressif conditionnel simple, CAR = autorégressif conditionnel, LCAR = autorégressif conditionnel de Leroux.

Tableau 5.1

Le facteur potentiel de réduction d'échelle  $\hat{R}$  de l'hyperparamètre  $\sigma_v^2$  et  $\rho$  et la limite de confiance supérieure correspondante de 95 % pour l'ensemble de données sans région non échantillonnée

Hyperparamètre	Covariable comprise	Facteur potentiel de réduction d'échelle (limite de confiance supérieure de 95 %)				
		FH	SAR	SCAR	CAR	LCAR
$\sigma_v^2$	$x_1, x_2$	0,995 (1,017)	0,987 (1,010)	0,995 (1,018)	0,985 (1,007)	1,008 (1,031)
	$x_1$	0,993 (1,015)	0,991 (1,012)	0,999 (1,022)	0,987 (1,009)	0,987 (1,01)
$\rho$	$x_1, x_2$	–	1,005 (1,028)	0,997 (1,023)	0,998 (1,036)	0,994 (1,017)
	$x_1$	–	1,005 (1,025)	0,997 (1,016)	0,998 (1,017)	1,019 (1,039)

Note : Toutes les limites supérieures se situent à l'intérieur de l'intervalle acceptable, en deçà de 1,1 (Gelman, Carlin, Stern, Dunson, Vehtari et Rubin, 2013, chapitre 11.5), ce qui n'indique aucune preuve d'absence de convergence.

– FH = Fay-Herriot, SAR = autorégressif simultané, SCAR = autorégressif conditionnel simple, CAR = autorégressif conditionnel, LCAR = autorégressif conditionnel de Leroux.

Le tableau 5.2 résume les diverses mesures d'évaluation que nous avons prises en compte et les améliorations en pourcentage (AP) respectives de l'EQMP et de l'ETMP. Lorsque les deux covariables sont disponibles, le modèle LCAR a une EQMP d'environ 14 % inférieure et un ETMP de 4 % inférieure par rapport au modèle FH à effets aléatoires indépendants. En ce qui concerne l'EQMP, le deuxième modèle le plus performant est le SAR qui présente une EQMP inférieure d'environ 9,5 %. Lorsque seule  $x_1$  (covariable de la semaine) est incluse dans le modèle ajusté, le modèle SAR a une erreur quadratique moyenne *a posteriori* d'environ 40 % inférieure et un écart-type moyen *a posteriori* de 14 % inférieur par rapport au modèle FH à effets aléatoires indépendants. Les modèles CAR et LCAR montrent des performances concurrentielles avec une EQMP d'environ 36 % inférieure et un ETMP de 13 % inférieur par rapport au modèle FH à effets aléatoires indépendants. En supprimant la covariable forte  $x_2$  du modèle complet, l'EQMP des modèles SAR et LCAR augmente respectivement d'environ 66 % et 84 %, respectivement, tandis que l'EQMP du modèle FH à effets aléatoires indépendants augmente de plus de 150 %.

Tableau 5.2

Erreur quadratique moyenne de prédiction (EQMP), écart-type moyen *a posteriori* (ETMP), et amélioration en pourcentage (AP) des modèles spatiaux par rapport au modèle Fay-Herriot (FH) à effets aléatoires indépendants

Covariable comprise	$x_1, x_2$					$x_1$				
	EQMP	EQMP-AP	ETMP	ETMP-AP	WAIC	EQMP	EQMP-AP	ETMP	ETMP-AP	WAIC
FH	2,88	–	1,93	–	259,06 (7,13)	7,27	–	2,31	–	267,75 (8,44)
SAR	2,61	9,55 %	1,94	0,34 %	261,46 (7,47)	4,34	40,22 %	1,98	14,25 %	265,76 (8,16)
SCAR	3,03	-5,14 %	1,95	-0,91 %	259,37 (7,01)	5,62	22,62 %	2,22	3,52 %	263,41 (7,29)
CAR	2,64	8,47 %	1,91	1,24 %	261,61 (7,86)	4,62	36,35 %	2,01	12,97 %	263,32 (7,96)
LCAR	2,47	14,50 %	1,85	4,19 %	261,79 (8,01)	4,54	37,51 %	1,97	14,36 %	263,35 (8,08)

– WAIC = critère d'information largement applicable, SAR = autorégressif simultané, SCAR = autorégressif conditionnel simple, CAR = autorégressif conditionnel, LCAR = autorégressif conditionnel de Leroux.

Pour ce qui est de la qualité de l'ajustement, le modèle FH à effets aléatoires indépendants montre le meilleur ajustement (la plus petite valeur WAIC) lorsque les deux covariables sont comprises. À l'inverse, lorsque seule  $x_1$  (covariable de la semaine) est comprise dans le modèle ajusté, le modèle FH à effets aléatoires indépendants montre le meilleur ajustement ayant la plus grande valeur WAIC. Toutefois, compte tenu des erreurs-types indiquées entre parenthèses, il n'y a pas de différence significative dans l'ajustement du modèle.

Le tableau 5.3 résume les distributions *a posteriori* de  $\rho$  en ce qui concerne la moyenne *a posteriori*, le mode et l'écart-type. Lorsque toutes les covariables sont comprises dans le modèle ajusté, les distributions *a posteriori* de  $\rho$  n'indiquent pas une forte dépendance spatiale, les moyennes *a posteriori* étant centrées autour de zéro avec de grands écarts-types. En revanche, lorsque seule  $x_1$  (covariable de la semaine) est comprise dans le modèle ajusté, la valeur  $\rho$  devient très significative, illustrant les distributions *a posteriori* concentrées près de la limite supérieure de sa corroboration.

En résumé, lorsque la faible covariable n'explique pas adéquatement la variation spatiale existante, les modèles spatiaux produisent de bien meilleures prédictions dans lesquelles la variation spatiale est prise en compte. Lorsqu'il ne reste aucune variation spatiale importante dans le résidu, les prédictions sont légèrement meilleures que celles du modèle FH à effets aléatoires indépendants, sans qu'il soit nécessaire de sacrifier l'ajustement du modèle.

**Tableau 5.3**  
**Moyenne et mode *a posteriori* (écart-type) de  $\rho$**

Covariable comprise	SAR	SCAR	CAR	LCAR
$x_1, x_2$	0,10/0,40 (0,48)	-0,06/0,04 (0,14)	0,21/0,83 (0,55)	0,57/0,80 (0,27)
$x_1$	0,76/0,80 (0,14)	0,14/0,17 (0,04)	0,93/0,99 (0,09)	0,85/0,97 (0,13)

Note : La première et la deuxième ligne du tableau résumant respectivement les distributions *a posteriori* de  $\rho$  lorsque les deux covariables sont comprises et lorsque seule  $x_1$  est comprise dans le modèle ajusté.

- SAR = autorégressif simultané, SCAR = autorégressif conditionnel simple, CAR = autorégressif conditionnel, LCAR = autorégressif conditionnel de Leroux.

## 5.2 Estimation de certaines moyennes d'États non échantillonnés en excluant leurs valeurs de la Current Population Survey

Dans la présente section, nous évaluons l'exactitude des prévisions des modèles spatiaux pour les petites régions non échantillonnées en utilisant le revenu médian du recensement de 1980  $x_1$ . Plus précisément, nous excluons aléatoirement les estimations de la CPS (estimations directes) de plusieurs États à chaque cas et faisons des prédictions pour les  $\theta_i$  des États exclus. Comme il y a 49 petites régions (États), nous avons créé 12 ensembles de données qui n'ont pas d'estimations directes pour  $m_1 = 4$  ou 5 régions, où  $m_1$  est le nombre de petites régions non échantillonnées, comme à la section 2.2. Les États exclus pour chaque ensemble de données sont énumérés au tableau 5.4.

Pour chaque ensemble de données, nous intégrons le modèle FH à effets aléatoires indépendants et les quatre modèles spatiaux indiqués en (2.11) à (2.13) à la distribution *a priori* non informative (2.13),  $\alpha = 0$  exécutant des chaînes Monte Carlo hamiltoniennes dans le même contexte qu'à la section 5.1. Les valeurs  $\hat{R}$  ne montrent aucune preuve d'absence de convergence, alors que des valeurs détaillées sont fournies à la figure 5.2 et au tableau 5.5. Pour chaque région non échantillonnée, l'erreur quadratique de prédiction  $EQP_i = (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2$  et l'écart-type *a posteriori*  $\text{é.t.}(\theta_i)$  sont obtenus pour chaque modèle. Si nous nous appuyons sur ce qui précède, nous constatons que la performance de prédiction est comparée au ratio suivant : pour  $i = 1, \dots, m$  et  $k = 2, \dots, 5$ ,

$$EQP - \text{Ratio}_{ki} = \frac{EQP_{ki}}{EQP_{1i}}, \quad ETP - \text{Ratio}_{ki} = \frac{\text{é.t.}_k(\theta_i)}{\text{é.t.}_1(\theta_i)} \quad (5.1)$$

où  $\text{é.t.}_k(\theta_i)$  est l'écart-type *a posteriori* (ETP) de  $\theta_i$  selon le  $k^{\text{e}}$  modèle. Une valeur de  $\text{SEQP} - \text{Ratio}_{ki}$  (ETP - Ratio<sub>ki</sub>) inférieure à 1 indique que le  $k^{\text{e}}$  modèle spatial présente une erreur quadratique de prédiction plus petite (écart-type *a posteriori*) que le modèle FH à effets aléatoires indépendants. Dans les figures 5.3 et 5.4, nous affichons les ratios en utilisant un schéma de couleurs rouge et bleu pour indiquer les ratios supérieurs et inférieurs à 1, respectivement, où une couleur plus foncée représente une valeur plus élevée.

Dans l'ensemble, les modèles SAR, SCAR, CAR et LCAR présentent des erreur quadratique de prédiction (EQP) plus petites dans 35, 41, 36 et 36 États, respectivement. Le modèle SCAR présente le plus grand nombre d'États dans lesquels les prédictions donnent de meilleurs résultats que celles du modèle FH à effets aléatoires indépendants, mais les améliorations globales sont les moins importantes. Dans plus de 35 États, les modèles SAR, CAR et LCAR produisent des prédictions plus précises que le modèle FH à effets aléatoires indépendants, et dans trois États (Nouveau-Mexique, Oregon et Wisconsin), les EQP sont plus de 100 fois plus petites. Pour la Californie, le Minnesota et la Caroline du Sud, tous les modèles spatiaux livrent des prédictions pires que le modèle FH à effets aléatoires indépendants. La Californie et le Minnesota ont des revenus médians beaucoup plus élevés que les États voisins, tandis que la Caroline du Sud a un revenu médian beaucoup plus bas. Parmi les 49 États, ces trois États ont la deuxième, la septième et la dix-neuvième valeur I de Moran locale la plus petite. Cela montre que si la moyenne de petites régions non échantillonnées est très différente de la moyenne de régions environnantes, les modèles spatiaux peuvent produire des prédictions inférieures. Le modèle qui démontre la meilleure correspondance en ce qui concerne le WAIC est le modèle SCAR, CAR ou LCAR; les chiffres exacts sont fournis au tableau 5.4.

**Tableau 5.4**

**États dont les estimations de la Current Population Survey sont exclues pour chaque ensemble de données et critère d'information largement applicable (WAIC pour widely applicable information criterion) correspondant**

États exclus	FH	SAR	SCAR	CAR	LCAR
AZ MS OK SD	246,15 (7,79)	244,37 (7,50)	241,71 (6,67)	242,46 (7,50)	242,21 (7,57)
AR CO DE TN	245,79 (7,83)	241,23 (7,69)	241,05 (6,70)	239,70 (7,61)	239,85 (7,69)
MD MI NV WV	246,06 (7,83)	242,23 (7,58)	241,34 (6,78)	240,13 (7,32)	240,02 (7,43)
MT NC NE NY	248,91 (8,10)	245,97 (9,51)	243,85 (6,87)	242,88 (8,34)	242,40 (8,36)
DC GA ID ND	245,07 (7,91)	241,02 (6,61)	240,09 (6,44)	239,16 (6,75)	239,48 (6,75)
AL MO VT WY	245,57 (8,31)	245,13 (7,67)	242,74 (7,38)	242,89 (7,65)	243,36 (7,66)
FL LA UT WA	247,38 (7,39)	245,64 (7,29)	243,08 (6,44)	243,25 (7,20)	243,48 (7,33)
MA MN SC TX	248,32 (9,73)	242,43 (8,95)	244,75 (8,83)	240,99 (8,69)	240,34 (8,56)
KY RI VA WI	243,86 (8,09)	241,74 (7,06)	240,05 (6,76)	239,04 (6,91)	238,87 (6,90)
IL IN NH PA	244,69 (7,10)	245,12 (7,41)	243,31 (6,59)	244,45 (7,60)	244,39 (7,68)
CA ME NJ OH	248,62 (8,54)	244,06 (8,26)	245,28 (7,68)	242,00 (7,78)	242,01 (7,90)
CT IA KS NM OR	239,86 (7,95)	239,81 (7,76)	237,28 (7,29)	237,78 (7,75)	237,75 (7,60)

Note : Les chiffres entre parenthèses sont les erreurs-types des estimations du WAIC.

- FH = Fay-Herriot, SAR = autorégressif simultané, SCAR = autorégressif conditionnel simple, CAR = autorégressif conditionnel, LCAR = autorégressif conditionnel de Leroux.

- AL = Alabama, AZ = Arizona, AR = Arkansas, CA = Californie, CO = Colorado, CT = Connecticut, DE = Delaware, DC = District de Columbia, FL = Floride, GA = Géorgie, ID = Idaho, IL = Illinois, IN = Indiana, IA = Iowa, KS = Kansas, KY = Kentucky, LA = Louisiane, ME = Maine, MD = Maryland, MA = Massachusetts, MI = Michigan, MN = Minnesota, MS = Mississippi, MO = Missouri, MT = Montana, NE = Nebraska, NV = Nevada, NH = New Hampshire, NJ = New Jersey, NM = Nouveau-Mexique, NY = New York, NC = Caroline du Nord, ND = Dakota du Nord, OH = Ohio, OK = Oklahoma, OR = Oregon, PA = Pennsylvanie, RI = Rhode Island, SC = Caroline du Sud, SD = Dakota du Sud, TN = Tennessee, TX = Texas, UT = Utah, VT = Vermont, VA = Virginie, WA = Washington, WV = Virginie-Occidentale, WI = Wisconsin, WY = Wyoming.

Tableau 5.5

Le facteur potentiel de réduction d'échelle  $\hat{R}$  de l'hyperparamètre  $\sigma_v^2$  et  $\rho$  et la limite de confiance supérieure correspondante de 95 % pour les 12 ensembles de données avec régions non échantillonnées

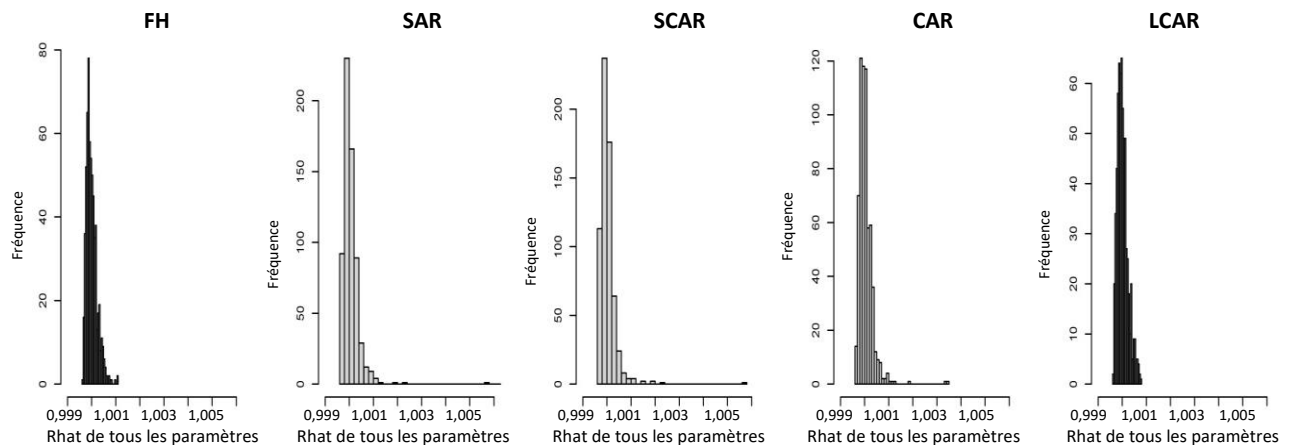
	États exclus	FH	SAR	SCAR	CAR	LCAR
Facteur potentiel de réduction d'échelle (limite de confiance supérieure de 95 %) de $\sigma_v^2$	AZ MS OK SD	0,991 (1,013)	1,012 (1,036)	0,995 (1,017)	1,005 (1,028)	1,005 (1,030)
	AR CO DE TN	0,997 (1,019)	1,010 (1,034)	0,999 (1,023)	0,985 (1,008)	0,984 (1,007)
	MD MI NV WV	0,992 (1,015)	1,007 (1,030)	1,023 (1,047)	1,001 (1,025)	1,011 (1,035)
	MT NC NE NY	0,990 (1,012)	0,984 (1,009)	0,997 (1,020)	0,999 (1,024)	0,983 (1,006)
	DC GA ID ND	1,002 (1,024)	1,007 (1,032)	1,001 (1,024)	1,011 (1,036)	0,997 (1,020)
	AL MO VT WY	0,997 (1,019)	1,006 (1,030)	0,998 (1,021)	1,002 (1,026)	1,019 (1,045)
	FL LA UT WA	1,014 (1,037)	1,005 (1,027)	1,002 (1,025)	0,999 (1,023)	1,019 (1,043)
	MA MN SC TX	1,008 (1,031)	1,001 (1,025)	1,003 (1,025)	0,994 (1,019)	1,007 (1,032)
	KY RI VA WI	1,011 (1,034)	1,005 (1,029)	1,009 (1,033)	0,989 (1,011)	1,011 (1,035)
	IL IN NH PA	0,992 (1,013)	1,018 (1,041)	0,992 (1,013)	0,989 (1,014)	0,989 (1,012)
	CA ME NJ OH	1,002 (1,025)	1,009 (1,033)	1,001 (1,024)	1,011 (1,035)	1,003 (1,026)
	CT IA KS NM OR	0,997 (1,018)	1,008 (1,032)	1,007 (1,030)	1,009 (1,034)	1,012 (1,041)
Facteur potentiel de réduction d'échelle (limite de confiance supérieure de 95 %) de $\rho$	AZ MS OK SD	–	1,005 (1,026)	1,001 (1,029)	1,004 (1,040)	0,995 (1,018)
	AR CO DE TN	–	1,019 (1,042)	0,993 (1,018)	1,000 (1,034)	1,005 (1,028)
	MD MI NV WV	–	1,005 (1,027)	0,992 (1,017)	0,988 (1,021)	1,002 (1,026)
	MT NC NE NY	–	1,001 (1,024)	0,999 (1,030)	0,986 (1,023)	0,998 (1,023)
	DC GA ID ND	–	0,999 (1,020)	0,995 (1,024)	0,991 (1,026)	1,000 (1,024)
	AL MO VT WY	–	1,003 (1,026)	1,011 (1,037)	0,989 (1,025)	1,008 (1,031)
	FL LA UT WA	–	1,004 (1,025)	0,996 (1,026)	1,000 (1,033)	1,005 (1,029)
	MA MN SC TX	–	1,002 (1,041)	1,014 (1,045)	0,984 (1,018)	0,996 (1,02)
	KY RI VA WI	–	1,010 (1,032)	0,990 (1,016)	0,993 (1,031)	0,986 (1,009)
	IL IN NH PA	–	1,030 (1,055)	0,993 (1,016)	0,994 (1,029)	1,003 (1,025)
	CA ME NJ OH	–	1,003 (1,026)	0,997 (1,026)	0,996 (1,032)	0,989 (1,012)
	CT IA KS NM OR	–	1,017 (1,040)	0,997 (1,022)	1,009 (1,044)	0,981 (1,003)

Note : Toutes les limites supérieures se situent à l'intérieur de la plage acceptable, en deçà de 1,1 (Gelman et coll., 2013, chapitre 11.5), ce qui n'indique aucune preuve d'absence de convergence.

– FH = Fay-Herriot, SAR = autorégressif simultané, SCAR = autorégressif conditionnel simple, CAR = autorégressif conditionnel, LCAR = autorégressif conditionnel de Leroux.

– AL = Alabama, AZ = Arizona, AR = Arkansas, CA = Californie, CO = Colorado, CT = Connecticut, DE = Delaware, DC = District de Columbia, FL = Floride, GA = Géorgie, ID = Idaho, IL = Illinois, IN = Indiana, IA = Iowa, KS = Kansas, KY = Kentucky, LA = Louisiane, ME = Maine, MD = Maryland, MA = Massachusetts, MI = Michigan, MN = Minnesota, MS = Mississippi, MO = Missouri, MT = Montana, NE = Nebraska, NV = Nevada, NH = New Hampshire, NJ = New Jersey, NM = Nouveau-Mexique, NY = New York, NC = Caroline du Nord, ND = Dakota du Nord, OH = Ohio, OK = Oklahoma, OR = Oregon, PA = Pennsylvanie, RI = Rhode Island, SC = Caroline du Sud, SD = Dakota du Sud, TN = Tennessee, TX = Texas, UT = Utah, VT = Vermont, VA = Virginie, WA = Washington, WV = Virginie-Occidentale, WI = Wisconsin, WY = Wyoming.

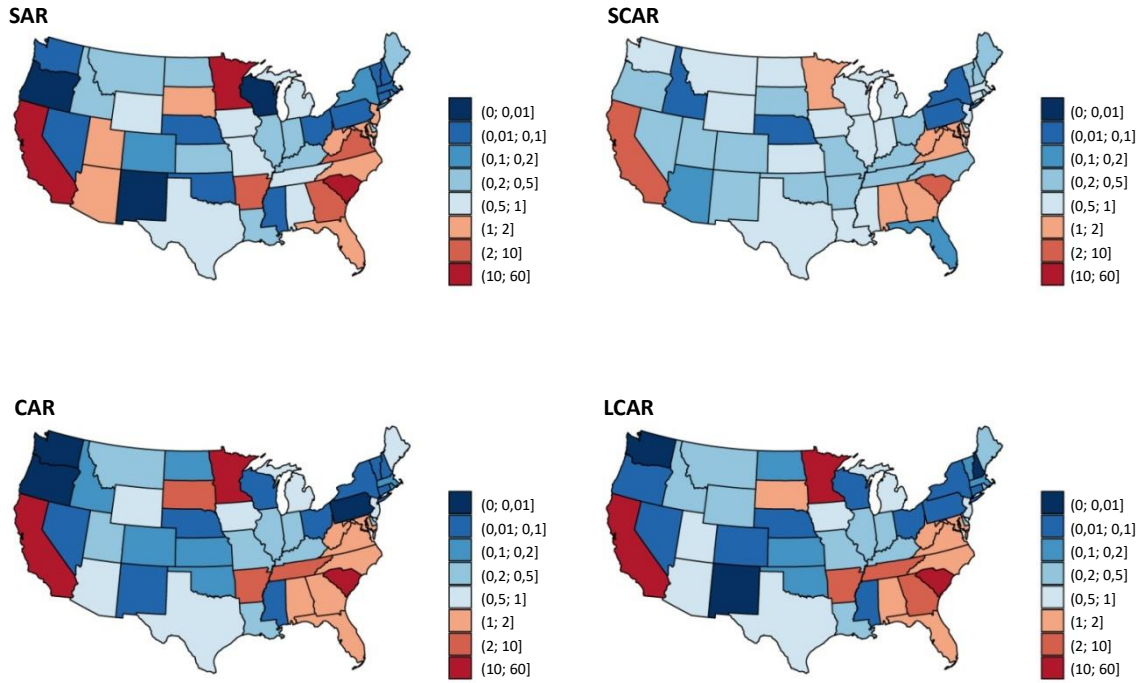
Figure 5.2 Le facteur potentiel de réduction d'échelle  $\hat{R}$  de tous les paramètres, lorsque les valeurs  $\hat{R}$  des 12 ensembles de données sont toutes combinées.



– Toutes les valeurs correspondent essentiellement à 1, ce qui indique qu'il n'y a aucune preuve d'absence de convergence.

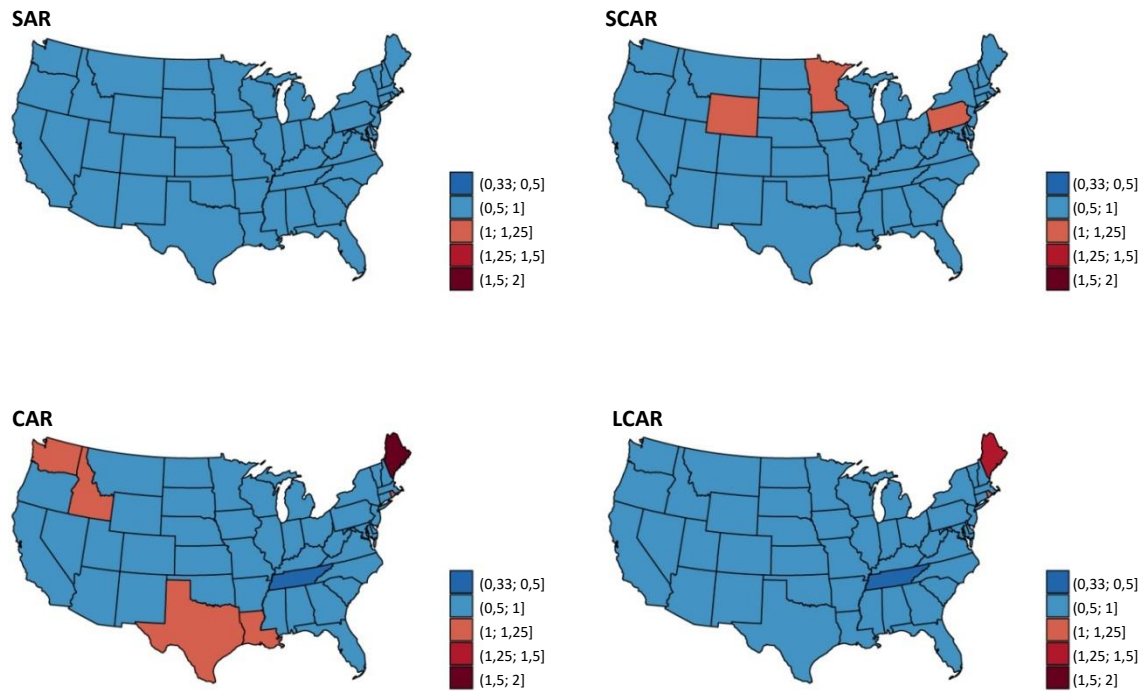
– FH = Fay-Herriot, SAR = autorégressif simultané, SCAR = autorégressif conditionnel simple, CAR = autorégressif conditionnel, LCAR = autorégressif conditionnel de Leroux.

**Figure 5.3 Ratios de l'erreur quadratique de prédiction.**



- Les valeurs inférieures (supérieure) à 1 sont représentées en bleu (rouge) et indiquent un modèle spatial ayant un écart quadratique plus petit (plus grand).
- SAR = autorégressif simultané, SCAR = autorégressif conditionnel simple, CAR = autorégressif conditionnel, LCAR = autorégressif conditionnel de Leroux.

**Figure 5.4 Ratios de l'écart-type *a posteriori*.**



- Les valeurs inférieures (supérieure) à 1 sont représentées en bleu (rouge) et indiquent un modèle spatial ayant un écart-type *a posteriori* plus petit (plus grand).
- SAR = autorégressif simultané, SCAR = autorégressif conditionnel simple, CAR = autorégressif conditionnel, LCAR = autorégressif conditionnel de Leroux.

## 6. Conclusions

Dans le présent article, nous avons suivi une approche bayésienne pour étudier quatre modèles spatiaux à effets aléatoires comme solutions de rechange au modèle indépendant de Fay-Herriot pour estimer les moyennes de petites régions. En particulier, nous avons examiné quatre modèles spatiaux avec différentes structures d'autocorrélation. Nous avons élargi les modèles spatiaux afin de permettre la présence de multiples petites régions sans estimations directes pour prédire les moyennes de petites régions pour toutes les régions. Pour une classe de distributions *a priori* non informatives, nous avons établi la pertinence des densités *a posteriori* des modèles proposés pour les deux configurations.

Une étude de simulation à la section 4 montre que l'exactitude des prévisions peut être grandement améliorée si l'on tient compte des modèles spatiaux lorsque des covariables efficaces ne sont pas disponibles. Datta, Hall et Mandal (2011) ont souligné que l'exactitude des prévisions des modèles d'estimation sur petites régions dépend en grande partie de la disponibilité de bonnes covariables. Autrement dit, lorsque des covariables appropriées ne sont pas disponibles, le modèle indépendant de Fay-Herriot pourrait ne pas offrir un avantage important par rapport aux estimations directes. Les résultats de la simulation ont indiqué que, dans de tels cas, les modèles spatiaux permettent d'augmenter considérablement la précision des prédictions en exploitant l'information provenant de régions adjacentes.

Nous avons appliqué les modèles spatiaux à effets aléatoires proposés pour estimer le revenu médian familial de quatre personnes. Même en présence d'une bonne covariable, les modèles spatiaux ont montré des améliorations notables quant à l'écart quadratique moyen et aux écarts-types moyens *a posteriori*. Lorsqu'une bonne covariable n'est pas disponible, les modèles spatiaux fournissent des prédictions du revenu médian beaucoup plus précises ayant une variabilité beaucoup plus faible, ce qui concorde avec les résultats de la simulation. De plus, les modèles SAR et LCAR fournissent des estimations plus précises sur petites régions lorsque les estimations directes de certains États sont exclues dans l'ajustement du modèle.

En résumé, les modèles spatiaux examinés dans le présent article donnent de meilleurs résultats que le modèle indépendant de Fay-Herriot. On peut s'attendre à une amélioration importante lorsque des covariables efficaces ne sont pas disponibles. Comme les covariables utiles ne sont pas toujours disponibles, l'utilité des modèles proposés pour l'estimation sur petites régions peut être substantielle. Notre étude de simulation et notre analyse de données réelles ne montrent aucun gagnant clair parmi les modèles proposés. Néanmoins, les modèles SAR et LCAR montrent une meilleure performance que d'autres modèles spatiaux. De plus, le modèle LCAR fonctionne très bien avec des données simulées issues du modèle SAR et des données réelles dont la dépendance spatiale est inconnue. Par conséquent, dans le contexte d'applications réelles où la véritable dépendance est inconnue, nous recommandons le modèle LCAR.

Les travaux de la présente étude supposent que toutes les régions comptent au moins un quartier. Dans les applications réelles, cependant, il y a de nombreuses situations où les données contiennent de petites régions sans quartiers (régions autonomes). Bien que les modèles proposés puissent prendre en compte des

régions autonomes en ajustant les entrées diagonales des matrices de précision comme dans Brown, Datta et Lazar (2017), nous constatons que cette approche donne lieu à une distribution *a priori* contre-intuitive, quand les régions autonomes ont des variances *a priori* des effets aléatoires plus petites que les régions comptant des quartiers. De plus, nous constatons que cette distribution *a priori* peut considérablement altérer les prédictions des régions autonomes. C'est un problème important dans la pratique, car de nombreux pays ont des îles; il s'agira peut-être de notre prochain filon de recherche.

## Avis de non-responsabilité et remerciements

Le présent rapport vise à informer les parties intéressées des travaux de recherche en cours et à favoriser la discussion. Les opinions exprimées sur les questions statistiques, méthodologiques, techniques ou opérationnelles sont celles des auteurs et non celles du U.S. Census Bureau ou de l'université de Géorgie. Les auteurs tiennent à remercier William R. Bell pour ses commentaires judicieux au sujet d'une version antérieure de ces travaux qui ont mené à l'amélioration du manuscrit.

## Annexe

### A. Preuve de la fonction de densité de probabilité *a posteriori*

**Preuve du théorème 1.** Pour des raisons de commodité, nous désignons  $\Omega_k(\rho)$  par  $\Omega_k$  et, pour une matrice quadratique donnée  $\mathbf{A}$ , le déterminant de  $\mathbf{A}$  est indiqué par  $|\mathbf{A}|$ . Nous utilisons  $K$  pour désigner une constante positive générique, indépendante des variables que nous intégrons.

Supposons que  $m_1 \geq 0$  est le nombre de petites régions sans estimation directe et supposons que  $m_2 = m - m_1$ . De plus, supposons que  $\mathbf{Y}_{(2)}$  est le vecteur  $m_2 \times 1$  comptant des estimations directes des petites régions échantillonnées. Sans perte de généralité, nous supposons que  $\theta_1, \dots, \theta_m$  sont disposés de sorte que  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_{(1)}^\top, \boldsymbol{\theta}_{(2)}^\top)^\top$ . Supposons que  $\mathbf{D}_{(2)} = \{D_i\}_{i=m_1+1}^m$  est la matrice diagonale avec variances d'échantillonnage correspondant aux composantes de  $\mathbf{Y}_{(2)}$  et  $\delta = \max_{m_1 < i \leq m} D_i < \infty$ .

La fonction de densité de probabilité (fdp) mixte de  $\mathbf{Y}_{(2)}$ ,  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\sigma_v^2$  et  $\rho$  est donnée par :

$$f(\mathbf{y}_{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho) = N_{m_2}(\mathbf{y}_{(2)} | \boldsymbol{\theta}_{(2)}, \mathbf{D}_{(2)}) N_m(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}^{-1}) g(\sigma_v^2) h(\rho), \quad (\text{A.1})$$

où  $N_{m_2}(\mathbf{y}_{(2)} | \boldsymbol{\theta}_{(2)}, \mathbf{D}_{(2)})$  est la fdp normale comportant une moyenne  $\boldsymbol{\theta}_{(2)}$  et une matrice de covariance  $\mathbf{D}_{(2)}$ . La fdp *a posteriori*  $\pi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho | \mathbf{y}_{(2)})$  sera adéquate si et seulement si la fonction  $f(\mathbf{y}_{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho)$  est intégrable relativement à  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\sigma_v^2$  et  $\rho$ . Puisque :

$$N_{m_2}(\mathbf{y}_{(2)} | \boldsymbol{\theta}_{(2)}, \mathbf{D}_{(2)}) \leq K \exp\left\{-\frac{1}{2\delta}(\mathbf{y}_{(2)} - \boldsymbol{\theta}_{(2)})^\top (\mathbf{y}_{(2)} - \boldsymbol{\theta}_{(2)})\right\},$$

nous avons, selon (A.1) :

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{y}_{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho) &\leq K \exp\left\{-\frac{1}{2\delta} (\mathbf{y}_{(2)} - \boldsymbol{\theta}_{(2)})^\top (\mathbf{y}_{(2)} - \boldsymbol{\theta}_{(2)})\right\} N_m(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}^{-1}) g(\sigma_v^2) h(\rho) \\
&= K \int \exp\left\{-\frac{1}{2\delta} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta})^\top (\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta})\right\} d\mathbf{y}_{(1)} N_m(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}^{-1}) g(\sigma_v^2) h(\rho), \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

où  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_{(1)}^\top, \mathbf{y}_{(2)}^\top)^\top$ . En intégrant les deux côtés de (A.2) relativement à  $\boldsymbol{\theta}$ , nous obtenons :

$$\int f(\mathbf{y}_{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho) d\boldsymbol{\theta} \leq K g(\sigma_v^2) h(\rho) \int N_m(\mathbf{y} | \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}^{-1}) d\mathbf{y}_{(1)}. \quad (\text{A.3})$$

Subdivisons  $\mathbf{X}$  en tant que  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]^\top$ , où  $\mathbf{X}_1^\top$  est  $m_1 \times p$  et  $\mathbf{X}_2^\top$  est  $m_2 \times p$ . Nous supposons que la ligne  $(\mathbf{X}_2) = p$ . Supposons que  $\mathbf{d} = (\boldsymbol{\theta}_{m_1}^\top, \mathbf{y}_{(2)}^\top)^\top$ ,  $\boldsymbol{\phi} = (\mathbf{y}_{(1)}^\top, \boldsymbol{\beta}^\top)^\top$  et

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{X}_1^\top \\ \mathbf{0}_{m_2, m_1} & \mathbf{X}_2^\top \end{bmatrix}.$$

Alors nous pouvons utiliser la notation :

$$\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi},$$

où  $\mathbf{G}$  est  $m \times (m_1 + p)$ ,  $\boldsymbol{\phi}$  est  $(m_1 + p) \times 1$ . Donc, l'équation (A.3) peut être formulée comme suit :

$$\int f(\mathbf{y}_{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho) d\boldsymbol{\theta} \leq K g(\sigma_v^2) h(\rho) \int N_m(\mathbf{d} | \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}, \delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}^{-1}) d\mathbf{y}_{(1)}. \quad (\text{A.4})$$

En intégrant les deux côtés de (A.4) relativement à  $\boldsymbol{\beta}$ , nous obtenons :

$$\int f(\mathbf{y}_{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\beta} \leq K g(\sigma_v^2) h(\rho) \int N_m(\mathbf{d} | \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}, \delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}^{-1}) d\boldsymbol{\phi}. \quad (\text{A.5})$$

Puisque la ligne  $(\mathbf{X}_2) = p$ , il s'ensuit immédiatement que la ligne  $(\mathbf{G}) = m_1 + p$ . Par conséquent,  $\mathbf{G}$  est dite « de plein rang-colonne ». Nous indiquons  $m_1 + p$  par  $q$ . Pour  $k = 2, \dots, 5$ , nous établissons maintenant les limites supérieures pour :

$$\left| \delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \right|^{-1/2} \int \exp\left\{-\frac{1}{2} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})^\top (\delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}_k^{-1})^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})\right\} d\boldsymbol{\phi}$$

qui pourront être intégrables relativement à  $\sigma_v^2$  et  $\rho$  comme suit.

## A.1 Renseignements sur le modèle autorégressif conditionnel simple (SCAR)

Prenons d'abord le modèle CAR où  $k = 2$ . Supposons que  $\mathbf{P}_W$  est une matrice orthogonale, de sorte que  $\mathbf{P}_W^\top \mathbf{W} \mathbf{P}_W = \text{diag}\{\lambda_i\}_{i=1}^m = \boldsymbol{\Lambda}$ . Alors  $\boldsymbol{\Omega}_2(\rho)^{-1} = \mathbf{P}_W \{\mathbf{I} - \rho \boldsymbol{\Lambda}\}^{-1} \mathbf{P}_W^\top$ , et donc,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})^\top (\delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}_2^{-1})^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}) &= (\mathbf{P}_W^\top \mathbf{d} - \mathbf{P}_W^\top \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})^\top (\delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \{\mathbf{I} - \rho \boldsymbol{\Lambda}\}^{-1})^{-1} (\mathbf{P}_W^\top \mathbf{d} - \mathbf{P}_W^\top \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}) \\
&= (\mathbf{d}_* - \mathbf{G}_* \boldsymbol{\phi})^\top (\delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \{\mathbf{I} - \rho \boldsymbol{\Lambda}\}^{-1})^{-1} (\mathbf{d}_* - \mathbf{G}_* \boldsymbol{\phi}),
\end{aligned}$$

où  $\mathbf{d}_* = \mathbf{P}_W^\top \mathbf{d}$  et  $\mathbf{G}_* = \mathbf{P}_W^\top \mathbf{G}$ . Supposons que les lignes de  $\mathbf{G}_*$  correspondant à des indices  $q$  distincts  $\{i_1, \dots, i_q\} \subseteq \{1, \dots, m\}$  sont linéairement indépendantes. Nous désignons ces lignes par  $\mathbf{g}_{i_k}^\top$ ,  $k=1, \dots, q$ . Supposons que  $\mathbf{A}$  est  $q \times q$  la matrice non singulière  $[\mathbf{g}_{i_1}^\top, \dots, \mathbf{g}_{i_q}^\top]^\top$  et que  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_q)^\top = \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}$ . Il convient de souligner que

$$(\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})^\top (\delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}_2^{-1})^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}) \geq \sum_{k=1}^q \frac{(d_{i_k} - \eta_{i_k})^2}{\delta + \sigma_v^2 (1 - \rho \lambda_{i_k})^{-1}}.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})^\top (\delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}_2^{-1})^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}) \right\} d\boldsymbol{\phi} &\leq \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^q \frac{(d_{i_k} - \eta_{i_k})^2}{\delta + \sigma_v^2 (1 - \rho \lambda_{i_k})^{-1}} \right\} d\boldsymbol{\phi} \\ &= \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^q \frac{(d_{i_k} - \eta_{i_k})^2}{\delta + \sigma_v^2 (1 - \rho \lambda_{i_k})^{-1}} \right\} d\boldsymbol{\eta} |\mathbf{A}^\top \mathbf{A}|^{-1/2} \\ &= K \prod_{k=1}^q \left\{ \delta + \sigma_v^2 (1 - \rho \lambda_{i_k})^{-1} \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

où  $K > 0$  est une constante adéquatement finie. De plus, nous savons que

$$|\delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}_2^{-1}|^{-1/2} = \prod_{i=1}^m \left\{ \delta + \sigma_v^2 (1 - \rho \lambda_i)^{-1} \right\}^{-1/2}. \quad (\text{A.7})$$

Suivant (A.6) et (A.7) nous obtenons :

$$\begin{aligned} &|\delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}_2^{-1}|^{-1/2} \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})^\top (\delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}_2^{-1})^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}) \right\} d\boldsymbol{\phi} \\ &\leq K \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_q\}} \left\{ \delta + \sigma_v^2 (1 - \rho \lambda_i)^{-1} \right\}^{-1/2} \\ &\leq K \left\{ I(\sigma_v^2 < N) + (\sigma_v^2)^{-(m-q)/2} \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_q\}} (1 - \rho \lambda_i)^{1/2} I(\sigma_v^2 > N) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

pour tout nombre positif  $N$ . Il ne faut pas oublier que  $\lambda_m^{-1} < \rho < \lambda_1^{-1}$ . Nous savons que  $1 - \rho \lambda_i$  est une valeur propre de  $\boldsymbol{\Omega}_2$ . Donc, pour  $\lambda_m^{-1} < \rho < \lambda_1^{-1}$ , pour  $i=1, \dots, m$ ,  $1 - \rho \lambda_i > 0$ . De plus,  $\sum_{i=1}^m (1 - \rho \lambda_i) = m$ . Cela suppose que  $0 < 1 - \rho \lambda_i < m$ . En suite, suivant (A.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &|\delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}_2^{-1}|^{-1/2} \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})^\top (\delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}_2^{-1})^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}) \right\} d\boldsymbol{\phi} \\ &\leq K \left\{ I(\sigma_v^2 < N) + (\sigma_v^2)^{-(m-q)/2} I(\sigma_v^2 > N) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Suivant (A.5) et (A.9), il s'ensuit que, dans les conditions établies par le théorème, l'intégrale  $\int f(\mathbf{y}_{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\beta} d\sigma_v^2 d\rho$  désirée est finie.

## A.2 Renseignements sur le modèle autorégressif simultané (SAR)

Prenons maintenant  $k = 3$  pour le modèle SAR. Suivant  $\mathbf{W}_* = \mathbf{L}^{-1/2} \mathbf{W} \mathbf{L}^{-1/2}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_3 &= (\mathbf{I}_m - \rho \tilde{\mathbf{W}})^\top (\mathbf{I}_m - \rho \tilde{\mathbf{W}}) \\ &= (\mathbf{L} - \rho \mathbf{W})^\top \mathbf{L}^{-2} (\mathbf{L} - \rho \mathbf{W}) \\ &= \mathbf{L}^{1/2} (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*) \mathbf{L}^{-1} (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*) \mathbf{L}^{1/2}. \end{aligned}$$

D'abord,  $\text{tr} \boldsymbol{\Omega}_3 = m + \rho^2 \sum_i \sum_j \tilde{w}_{ij}^2 \leq m + \rho^2 \sum_i \sum_j \tilde{w}_{ij} = m + \rho^2 m < 2m$  puisque  $0 \leq \tilde{w}_{ij} \leq 1$ ,  $\sum_j \tilde{w}_{ij} = 1$ , et  $-1 < \rho < 1$ .

Il convient de souligner que les valeurs propres  $v_1, \dots, v_m$  de  $\mathbf{W}_*$  sont toutes réelles (car  $\mathbf{W}_*$  est symétrique). De plus,  $\mathbf{W}_*$  et  $\tilde{\mathbf{W}}$  ont des valeurs propres identiques. Étant une matrice stochastique,  $\tilde{\mathbf{W}}$  a au moins une valeur propre qui est 1 et les valeurs propres restantes ont une borne supérieure égale à 1, c'est-à-dire que  $|v_i| \leq 1$  et  $\max_i v_i = 1$ . Comme  $-1 < \rho < 1$  et  $1 - \rho v_i > 0$ ,  $|\boldsymbol{\Omega}_3| = \prod_{i=1}^m (1 - \rho v_i)^2 > 0$ . Ainsi, les valeurs propres de  $\boldsymbol{\Omega}_3$  sont positives, et elles ont une borne supérieure égale à  $2m$ . Supposons que  $l_{(1)} = \min l_i$  et  $l_{(m)} = \max l_i$ , où  $\mathbf{L} = \text{diag}\{l_i\}_{i=1}^m$ . Alors  $l_{(1)} > 0$  et  $l_{(m)}$  ont une borne supérieure. Si l'on écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma}_3 = \delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}_3^{-1} = \mathbf{L}^{-1/2} \left\{ \delta \mathbf{L} + \sigma_v^2 (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*)^{-1} \mathbf{L} (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*)^{-1} \right\} \mathbf{L}^{-1/2},$$

nous avons :

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\Sigma}_3| &= |\mathbf{L}|^{-1} \left| \delta \mathbf{L} + \sigma_v^2 (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*)^{-1} \mathbf{L} (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*)^{-1} \right| \geq |\mathbf{L}|^{-1} l_{(1)}^m \left| \delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*)^{-2} \right| \\ &= |\mathbf{L}|^{-1} l_{(1)}^m \prod_{i=1}^m \left\{ \delta + \sigma_v^2 (1 - \rho v_i)^{-2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Supposons que  $\mathbf{P}_{\mathbf{W}_*}$  est la matrice des vecteurs propres de  $\mathbf{W}_*$ , de sorte que  $\mathbf{P}_{\mathbf{W}_*}^\top \mathbf{W}_* \mathbf{P}_{\mathbf{W}_*} = \text{diag}\{v_i\}_{i=1}^m = \mathbf{N}_*$ , nous avons aussi :

$$\begin{aligned} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})^\top \boldsymbol{\Sigma}_3^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}) &= (\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{d} - \mathbf{L}^{1/2} \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})^\top \left\{ \delta \mathbf{L} + \sigma_v^2 (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*)^{-1} \mathbf{L} (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*)^{-1} \right\}^{-1} (\mathbf{L}^{1/2} \mathbf{d} - \mathbf{L}^{1/2} \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}) \\ &= (\mathbf{r} - \mathbf{S}\boldsymbol{\phi})^\top \left\{ \delta \mathbf{L} + \sigma_v^2 (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*)^{-1} \mathbf{L} (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*)^{-1} \right\}^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{S}\boldsymbol{\phi}) \\ &\geq (l_{(m)}^{-1/2} \mathbf{r} - l_{(m)}^{-1/2} \mathbf{S}\boldsymbol{\phi})^\top \left\{ \delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*)^{-2} \right\}^{-1} (l_{(m)}^{-1/2} \mathbf{r} - l_{(m)}^{-1/2} \mathbf{S}\boldsymbol{\phi}) \\ &= (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{S}}\boldsymbol{\phi})^\top \left\{ \delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{N}_*)^{-2} \right\}^{-1} (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{S}}\boldsymbol{\phi}) \\ &\geq \sum_{k=1}^q \frac{(\tilde{r}_k - \tilde{s}_k^\top \boldsymbol{\phi})^2}{\delta + \sigma_v^2 (1 - \rho v_k)^{-2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

où  $\mathbf{r} = \mathbf{L}^{1/2} \mathbf{d}$ ,  $\mathbf{S} = \mathbf{L}^{1/2} \mathbf{G}$ ,  $\tilde{\mathbf{r}} = l_{(m)}^{-1/2} \mathbf{P}_{\mathbf{W}_*} \mathbf{r}$ ,  $\tilde{\mathbf{S}} = l_{(m)}^{-1/2} \mathbf{P}_{\mathbf{W}_*} \mathbf{S}$ , et  $\{i_1, \dots, i_q\}$  forment un sous-ensemble de  $\{1, \dots, m\}$  de telle sorte que la matrice  $q \times q$   $[\tilde{s}_{i_1}, \dots, \tilde{s}_{i_q}]^\top = \tilde{\mathbf{S}}_1$ , une sous-matrice de  $\tilde{\mathbf{S}}$ , est non singulière. Il convient de mentionner que  $\tilde{\mathbf{S}}_1$  est déterminé par  $\mathbf{W}$ . En utilisant (A.11), nous obtenons :

$$\int \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})^\top \boldsymbol{\Sigma}_3^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})\right\} d\boldsymbol{\phi} \leq (2\pi)^{q/2} |\tilde{\mathbf{S}}_1^\top \tilde{\mathbf{S}}_1|^{-1/2} \prod_{k=1}^q \left\{\delta + \sigma_v^2 (1 - \rho v_{i_k})^{-2}\right\}^{1/2}. \quad (\text{A.12})$$

Suivant (A.10) et (A.12), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int |\boldsymbol{\Sigma}_3|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})^\top \boldsymbol{\Sigma}_3^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})\right\} d\boldsymbol{\phi} &\leq K \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_q\}} \left\{\delta + \sigma_v^2 (1 - \rho v_i)^{-2}\right\}^{-1/2} \\ &\leq K \left\{ I(\sigma_v^2 < N) + (\sigma_v^2)^{-(m-q)/2} I(\sigma_v^2 > N) \prod_{i \in \{i_1, \dots, i_q\}} (1 - \rho v_i) \right\} \\ &\leq K \left\{ I(\sigma_v^2 < N) + (\sigma_v^2)^{-(m-q)/2} I(\sigma_v^2 > N) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

où nous nous appuyons sur le fait que  $-1 < \rho < 1$  et que  $-1 \leq v_i \leq 1$  pour faire valoir que  $0 < 1 - \rho v_i < 2$ . Suivant (A.5) et (A.13), nous procédons donc comme nous l'avons fait pour le modèle CAR, c'est-à-dire que l'intégrale  $\int f(\mathbf{y}_{(2)}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_v^2, \rho) d\boldsymbol{\theta} d\boldsymbol{\beta} d\sigma_v^2 d\rho$  désirée est finie dans les conditions du théorème.

### A.3 Renseignements sur le modèle autorégressif conditionnel (CAR)

Prenons maintenant  $k = 4$  pour le modèle autorégressif intrinsèque (IAR), où :

$$\boldsymbol{\Omega}_4 = \mathbf{L} - \rho \mathbf{W} = \mathbf{L}^{1/2} (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*) \mathbf{L}^{1/2}.$$

Soit  $\boldsymbol{\Sigma}_4 = \delta \mathbf{I}_m + \sigma_v^2 \boldsymbol{\Omega}_4^{-1} = \mathbf{L}^{-1/2} \left\{ \delta \mathbf{L} + \sigma_v^2 (\mathbf{I}_m - \rho \mathbf{W}_*)^{-1} \right\} \mathbf{L}^{-1/2}$ . Alors :

$$|\boldsymbol{\Sigma}_4| \geq |\mathbf{L}|^{-1} k_*^m \prod_{i=1}^m \left\{ \delta + \sigma_v^2 (1 - \rho v_i)^{-1} \right\}, \quad (\text{A.14})$$

où  $k_*^m = \min\{l_{(1)}, 1\}$ . En procédant de la même façon que dans (A.11), nous obtenons ceci :

$$(\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi})^\top \boldsymbol{\Sigma}_4^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\boldsymbol{\phi}) \geq \sum_{k=1}^q \frac{(\tilde{r}_{i_k} - \tilde{s}_{i_k}^\top \boldsymbol{\phi})^2}{\delta + \sigma_v^2 (1 - \rho v_{i_k})^{-1}}. \quad (\text{A.15})$$

Encore une fois, comme nous l'avons fait pour les deux cas précédents, nous pouvons utiliser (A.14) et (A.15) pour établir que l'intégrale désirée est finie dans les conditions énoncées dans le théorème.

### A.4 Renseignements sur le modèle autorégressif conditionnel de Leroux (LCAR)

Enfin, nous considérons  $k = 5$ , où pour le cas LCAR nous avons :

$$\boldsymbol{\Omega}_5 = \rho \mathbf{R} + (1 - \rho) \mathbf{I}_m.$$

Supposons que  $r_1, \dots, r_m$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{R}$  et que  $\mathbf{P}_R$  est une matrice orthogonale de sorte que  $\mathbf{P}_R^\top \mathbf{R} \mathbf{P}_R = \text{diag}\{r_i\}_{i=1}^m$ . Étant donné que  $\mathbf{R}$  est une matrice définie non négative,  $r_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, m$  et  $\sum_{i=1}^m r_i = \text{tr} \mathbf{R} = \sum_{i=1}^m l_i$ , ce qui suppose que  $r_1, \dots, r_m$  sont tous compris entre 0 et  $l = \sum_{i=1}^m l_i$ . Alors on peut écrire :

$$\mathbf{\Omega}_5 = \mathbf{P}_R \left\{ \text{diag}\{\rho r_i + 1 - \rho\}_{i=1}^m \right\} \mathbf{P}_R^\top,$$

et prétendre que pour  $0 < \rho < 1$ , les valeurs propres de  $\mathbf{\Omega}_5$  sont toutes positives et possèdent une borne supérieure égale à  $\sum_{i=1}^m r_i + 1 = l + 1$ . Ensuite, étant donné  $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{P}_R^\top \mathbf{d}$  et  $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{P}_R^\top \mathbf{G}$ , nous pouvons établir une inégalité similaire à (A.11). Il convient de mentionner que la matrice non singulière  $\tilde{\mathbf{S}}_1$  est une sous-matrice de  $\tilde{\mathbf{S}}$  et est exempte de  $\rho$ . Le caractère limitatif des valeurs propres de  $\mathbf{\Omega}_5$  entraînera une inégalité semblable à (A.14). Enfin, nous obtenons l'intégrale désirée qui est finie dans les conditions du théorème.

## Bibliographie

- Banerjee, S., Carlin, B.P., et Gelfand, A.E. (2003). *Hierarchical Modeling and Analysis for Spatial Data*, Chapman and Hall/CRC.
- Berger, J.O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, Springer Science & Business Media.
- Besag, J., et Kooperberg, C. (1995). On conditional and intrinsic autoregressions. *Biometrika*, 82, 733-746.
- Brown, D.A., Datta, G.S. et Lazar, N.A. (2017). A Bayesian generalized CAR model for correlated signal detection. *Statistica Sinica*, 27, 1125-1153.
- Datta, G.S., et Lahiri, P. (2000). A unified measure of uncertainty of estimated best linear unbiased predictors in small area estimation problems. *Statistica Sinica*, 10, 613-627.
- Datta, G.S., et Smith, D.D. (2003). On propriety of posterior distributions of variance components in small area estimation. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 112, 175-183.
- Datta, G.S., Hall, P. et Mandal, A. (2011). Model selection by testing for the presence of small-area effects, and application to area-level data. *Journal of the American Statistical Association*, 106, 362-374.

- Datta, G.S., Rao, J.N.K. et Smith, D.D. (2005). On measuring the variability of small area estimators under a basic area level model. *Biometrika*, 92, 183-196.
- Datta, G.S., Lahiri, P., Maiti, T. et Lu, K.L. (1999). Hierarchical Bayes estimation of unemployment rates for the states of the U.S. *Journal of the American Statistical Association*, 94, 1074-1082.
- Fay, R.E., et Herriot, R.A. (1979). Estimates of income for small places: An application of James-Stein procedures to census data. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 269-277.
- Gelman, A., et Rubin, D.B. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequences. *Statistical Science*, 7, 457-472.
- Gelman, A., Carlin, J.B., Stern, H.S., Dunson, D.B., Vehtari, A. et Rubin, D.B. (2013). *Bayesian Data Analysis*, CRC Press, 3<sup>rd</sup> ed.
- Ghosh, M. (1992). Hierarchical and empirical Bayes multivariate estimation. Dans *Current Issues in Statistical Inference: Essays in Honor of D. Basu*, (Éds., M. Ghosh et P.K. Pathak), Institute of Mathematical Statistics, 151-177.
- Hodges, J.S. (2019). *Richly Parameterized Linear Models: Additive, Time Series, and Spatial Models Using Random Effects*, Chapman and Hall/CRC.
- Leroux, B.G., Lei, X. et Breslow, N. (2000). Estimation of disease rates in small areas: A new mixed model for spatial dependence. Dans *Statistical Models in Epidemiology, the Environment, and Clinical Trials*, Springer, 179-191.
- MacNab, Y.C. (2003). Hierarchical Bayesian spatial modelling of small-area rates of non-rare disease. *Statistics in Medicine*, 22, 1761-1773.
- Opsomer, J.D., Claeskens, G., Ranalli, M.G., Kauermann, G. et Breidt, F. (2008). Non-parametric small area estimation using penalized spline regression. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 70, 265-286.
- Porter, A.T., Wikle, C.K. et Holan, S.H. (2015). Small area estimation via multivariate Fay-Herriot models with latent spatial dependence. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 57, 15-29.
- Porter, A.T., Holan, S.H., Wikle, C.K. et Cressie, N. (2014). Spatial Fay-Herriot models for small area estimation with functional covariates. *Spatial Statistics*, 10, 27-42.

- Prasad, N.G.N., et Rao, J.N.K. (1990). The estimation of the mean squared error of small-area estimators. *Journal of the American Statistical Association*, 85, 163-171.
- Rao, J.N.K., et Molina, I. (2015). *Small Area Estimation*, New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Rao, J.N.K., Sinha, S.K. et Dumitrescu, L. (2014). Robust small area estimation under semi-parametric mixed models. *Canadian Journal of Statistics*, 42, 126-141.
- Speckman, P.L., et Sun, D. (2003). Fully Bayesian spline smoothing and intrinsic autoregressive priors. *Biometrika*, 90, 289-302.
- Stan Development Team (2018). *RStan: The R interface to Stan*. R package version 2.17.3.
- Sun, D., Tsutakawa, R.K. et Speckman, P.L. (1999). Posterior distribution of hierarchical models using CAR (1) distributions. *Biometrika*, 86, 341-350.
- Torabi, M. (2012). Hierarchical Bayes estimation of spatial statistics for rates. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 142, 358-365.
- Trevisani, M., et Gelfand, A. (2013). Spatial misalignment models for small area estimation: A simulation study. Dans *Advances in Theoretical and Applied Statistics*, Springer, 269-279.
- Watanabe, S., et Opper, M. (2010). Asymptotic equivalence of Bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory. *Journal of Machine Learning Research*, 11.
- Whittle, P. (1954). On stationary processes in the plane. *Biometrika*, 41, 434-449.
- You, Y., et Zhou, Q.M. (2011). [Estimation sur petits domaines hiérarchique bayésienne sous un modèle spatial avec application à des données d'enquête sur la santé](https://www150.statcan.gc.ca/n1/fr/pub/12-001-x/2011001/article/11445-fra.pdf). *Techniques d'enquête*, 37, 1, 31-44. Article accessible à l'adresse <https://www150.statcan.gc.ca/n1/fr/pub/12-001-x/2011001/article/11445-fra.pdf>.